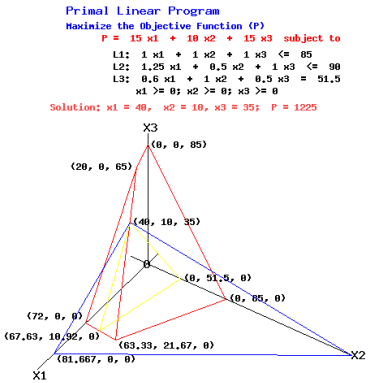
МИКОЛАЇВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ПЕТРА МОГИЛИ

Трунов О.М., Волкова С.О.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ПРАКТИЧНИХ ТА СИТУАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З КУРСУ «ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

ДЛЯ СТУДЕНТІВ-МАГІСТРІВ СПЕЦІАЛЬНІСТЬ «ФІНАНСИ»



Миколаїв

2008

Автори:

Трунов Олександр Миколайович *– к.т.н., доцент, перший проректор Миколаївського державного університету ім. Петра Могили.*

Волкова Світлана Олександрівна *- аспірант спеціальності «Інформаційні технології», викладач кафедри «Медичних приладів та систем» МДГУ ім. Петра Могили.*

Даний методичний посібник має на меті покращити розуміння основних видів завдань з курсу «Дослідження операцій» шляхом їх детального (покрокового) пояснення алгоритмів розв’язання.

Переважно розглядаються наступні приклади завдань з розв’язками:

- *Приклад розв’язання задач лінійного програмування графоаналітичним методом;*
- *Приклад розв’язання задач лінійного програмування симплекс-методом;*
- *Приклад розв’язання задач цілочисельного лінійного програмування;*
- *Приклад розв’язання транспортної задачі;*
- *Приклад розв’язання задачі комівояжера;*
- *Приклад розв’язання задачі нелінійного програмування;*
- *Приклад розв’язання задачі динамічного програмування.*

Крім того, приведено приклади формування математичних моделей та розв’язання ситуаційних задач.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФОАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

Приклад 1. Розрахувати прибуток їдальні при наявності запасів ресурсів і випуску двох страв, якщо маємо такі початкові дані:

Ресурс	**Запас**	**Норми витрат**	
		Жарке	Котлети
М’ясо Картопля Крупа	35 кг 42 кг 28 кг	0,4 кг 0,2 кг 0,25 кг	0,15 кг 0,3кг 0,2 кг
Гроші	21 грн.	0,176	0,202
Трудові ресурси	7 чол.	0,06	0,043
Кількість страв		X_1	X_2
Прибуток		4,65	4,05

Далі складаємо відповідну математичну модель:

$F = 4{,}65 * X_1 + 4{,}05 * X_2 \to \max$ - функція мети

$0{,}4 * X_1 + 0{,}15 * X_2 \le 35$ - м’ясо

$0{,}2 * X_1 + 0{,}3 * X_2 \le 42$ - картопля

$0{,}25 * X_1 + 0{,}2 * X_2 \le 28$ - крупа

$0{,}176 * X_1 + 0{,}202 * X_2 \le 21$ - гроші

$0{,}06 * X_1 + 0{,}043 * X_2 \le 7$ - трудові ресурси

$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$

Замінюємо нерівності на рівності:

$F = 4{,}65 * X_1 + 4{,}05 * X_2 \to \max$

$0{,}4 * X_1 + 0{,}15 * X_2 = 35$

$0{,}2 * X_1 + 0{,}3 * X_2 = 42$

$0{,}25 * X_1 + 0{,}2 * X_2 = 28$

$0{,}176 * X_1 + 0{,}202 * X_2 = 21$

$0{,}06 * X_1 + 0{,}043 * X_2 = 7$

Ми отримали рівняння для прямих ліній. Знаходимо точки перетину їх з осями координат:

1) $X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$

$0{,}4 * 0 + 0{,}15 * X_2 = 35$ $\qquad$ $0{,}4 * X_1 + 0{,}15 * 0 = 35$

$0{,}15 * X_2 = 35$ $\qquad$ $0{,}4 * X_1 = 35$

$X_2 = 233$ $\qquad$ $X_1 = 88$

2) $X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$

$0{,}2 * 0 + 0{,}3 * X_2 = 42$ $\qquad$ $0{,}2 * X_1 + 0{,}3 * 0 = 42$

$0{,}3 * X_2 = 42$ $\qquad$ $0{,}2 * X_1 = 42$

$X_2 = 140$ $\qquad$ $X_1 = 210$

3) $X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$

$0{,}25 * 0 + 0{,}2 * X_2 = 28$ $\qquad$ $0{,}25 * X_1 + 0{,}2 * 0 = 28$

$0{,}2 * X_2 = 28$ $\qquad$ $0{,}25 * X_1 = 28$

$X_2 = 140$ $\qquad$ $X_1 = 112$

4) $X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$

$0{,}176 * 0 + 0{,}202 * X_2 = 21$ $\qquad$ $0{,}176 * X_1 + 0{,}202 * 0 = 21$

$0{,}202 * X_2 = 21$ $\qquad$ $0{,}176 * X_1 = 21$

$X_2 = 104$ $\qquad$ $X_1 = 119$

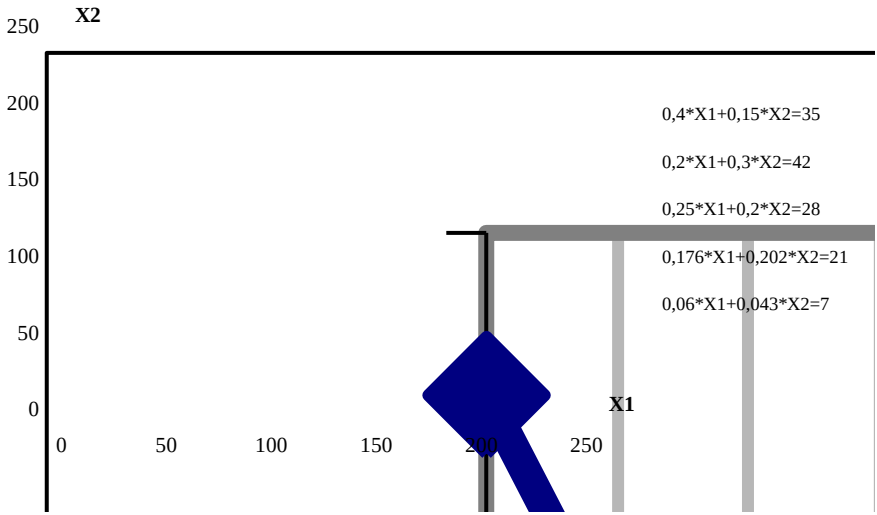
5) $X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$

$0{,}06 * 0 + 0{,}043 * X_2 = 7$ $\qquad$ $0{,}06 * X_1 + 0{,}043 * 0 = 7$

$0{,}043 * X_2 = 7$ $\qquad$ $0{,}06 * X_1 = 7$

$X_2 = 163$ $\qquad$ $X_1 = 117$

Будуємо відповідний графік:



Знаходимо точки оптимуму:

$$F_1 = 4{,}65*88 + 4{,}05*0 = 409{,}2$$

$$F_2 = 4{,}65*0 + 4{,}05*0 = 0$$

$$F_3 = 4{,}65*0 + 4{,}05*119 = 481{,}95$$

$$F_4 = 4{,}65*70 + 4{,}05*43 = 499{,}65$$

Отже, точкою максимуму є (70,43), а точкою мінімуму (0,0). Отже, максимальний прибуток ми одержимо тоді, коли будемо випускати 70 порцій жаркого та 43 порції котлет.

Приклад 2. Виробництво отримало завдання випустити суші для добрив. У таблиці вказані: види матеріалів, загальна вага, ціна і вміст компонентів. Отримати суміші при найменшій ціні і при вимогах ринку: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{2}$. Вимоги плану: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{2}{1}$.

Вид матеріалу	**Загальна вага**	**Ціна 1 кг добрив**	**Вага компонентів в 1 кг добрив**			
			Аміак	Суперфосфат	Калій	Натрій
Добриво1	X_1	5,6	0,9	0,5	4,53	2,65
Добриво2	X_2	4,9	0,1	3,65	1,2	-
Потрібна вага компонентів в суміші			56	56	19	7

Далі складаємо відповідну математичну модель:

$F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 \to \min$ - функція мети,

$0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 \geq 56$ - аміак,

$0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 \geq 56$ - суперфосфат,

$4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 \geq 19$ - калій,

$2.65 * X_1 \geq 7$ - натрій

$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{2}$ - вимога ринку, $\frac{X_1}{X_2} = \frac{2}{1}$ - вимога плану,

$X_j \geq 0.$

З математичної моделі ми бачимо, що маємо суперечливі умови: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{2}$ та $\frac{X_1}{X_2} = \frac{2}{1}$.

Ми розуміємо, що виконання цих двох умов одночасно неможливо. Розглянемо два випадки: перший – при вимогах ринку, а другий – при вимогах плану, і оберемо найкращий.

Вимоги ринку. Замінюємо нерівності на рівності:

$$F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 \to \min,$$

$$0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 = 56,$$

$$0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 = 56,$$

$$4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 = 19,$$

$$2.65 * X_1 = 7,$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{2}.$$

Ми отримали рівняння для прямих ліній. Розв’язуємо рівняння:

1) $F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 = 112$, $F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 = 112$,

$5.6 * X_1 + 4.9 * 0 = 112$, $5.6 * 0 + 4.9 * X_2 = 112$,

$\underline{X_1 = 20}$. $\underline{X_2 = 22.9}$.

2) $0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 = 56$, $0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 = 56$,

$0.9 * X_1 + 0.1 * 0 = 56$, $0.9 * 0 + 0.1 * X_2 = 56$,

$\underline{X_1 = 62.2}$. $\underline{X_2 = 560}$.

3) $0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 = 56$, $0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 = 56$,

$0.5 * X_1 + 3.65 * 0 = 56$, $0.5 * 0 + 3.65 * X_2 = 56$,

$\underline{X_1 = 112}$. $\underline{X_2 = 15.3}$.

4) $4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 = 19$, $4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 = 19$,

$4.53 * X_1 + 1.2 * 0 = 19$, $4.53 * 0 + 1.2 * X_2 = 19$,

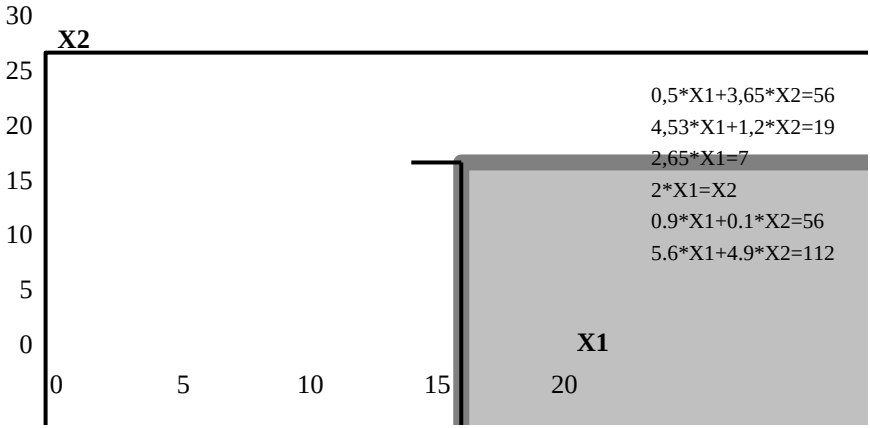
$\underline{X_1 = 4.2}$. $\underline{X_2 = 1}$.

5) $2.65 * X_1 = 7$,

$\underline{X_1 = 2.64}$.

6) $2 * X_1 = X_2$ - це рівняння прямої, яка проходить через центр координат.

Будуємо відповідні графіки і визначаємо область.



Знаходимо точку оптимуму, яка знаходиться у визначеній області на прямій $2 * X_1 = X_2$, тому що ми обов’язково повинні виконати вимоги ринку.

$F =$ 5,6*50+4,9*100=770.

Отже ми бачимо, що функція мети прямує до мінімуму в точці (50; 100).

Вимоги плану. Замінюємо нерівності на рівності:

$F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 \to \min$,

$0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 = 56$,

$0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 = 56$,

$4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 = 19$,

$2.65 * X_1 = 7$,

$\frac{X_1}{X_2} = \frac{2}{1}$.

Ми отримали рівняння для прямих ліній. Розв'язуємо рівняння:

1) $F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 = 112$, $F = 5.6 * X_1 + 4.9 * X_2 = 112$,

$5.6 * X_1 + 4.9 * 0 = 112$, $5.6 * 0 + 4.9 * X_2 = 112$,

$\underline{X_1 = 20}$. $\underline{X_2 = 22.9}$.

2) $0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 = 56$, $0.9 * X_1 + 0.1 * X_2 = 56$,

$0.9 * X_1 + 0.1 * 0 = 56$, $0.9 * 0 + 0.1 * X_2 = 56$,

$\underline{X_1 = 62.2}$. $\underline{X_2 = 560}$.

3) $0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 = 56$, $0.5 * X_1 + 3.65 * X_2 = 56$,

$0.5 * X_1 + 3.65 * 0 = 56$, $0.5 * 0 + 3.65 * X_2 = 56$,

$\underline{X_1 = 112}$. $\underline{X_2 = 15.3}$.

4) $4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 = 19$, $4.53 * X_1 + 1.2 * X_2 = 19$,

$4.53 * X_1 + 1.2 * 0 = 19$, $4.53 * 0 + 1.2 * X_2 = 19$,

$\underline{X_1 = 4.2}$. $\underline{X_2 = 1}$.

5) $2.65 * X_1 = 7$,

$\underline{X_1 = 2.64}$.

6) $0.5 * X_1 = X_2$ - це пряма, яка проходить через центр координат.

Знаходимо точку оптимуму, яка знаходиться у визначеній області на прямій $0.5*X_1 = X_2$, тому що ми обов'язково повинні виконати вимоги плану. F =5,6*60+4,9*30=483.

Отже ми бачимо, що функція мети прямує до мінімуму в точці (60; 30).

Приклад 3. Випустити добрива №1 та №2 у вигляді суміші з умовою отримання максимального прибутку. Наявний ресурс є випадковою величиною з рівномірним розподілом і з ймовірністю постачання р=0,8.

Робимо розрахунки та заповнюємо таблицю:

Вид ресурсів	**Запаси ресурсів**	**Норми витрат на 1 кг добрив**	
		Добриво 1	**Добриво 2**
Аміак	63…84	0,365	0,083
Суперфосфат	35…70	0,533	0,04
Калій	140…168	-	0,35
Вага добрива, кг		X_1	X_2
Прибуток		8	9

Далі складаємо відповідну математичну модель:

$$F = 8*X_1 + 9*X_2 \to \max \text{ - функція мети,}$$

$$0.365*X_1 + 0.083*X_2 \le 63...84 \text{ - аміак,}$$

$$0.533*X_1 + 0.04*X_2 \le 35...70 \text{ - суперфосфат,}$$

$$0.35*X_2 \le 140...168 \text{ - калій, } X_j \ge 0.$$

Розрахуємо запаси ресурсів за формулою:

$$b_i = b_{i\min} + (b_{i\max} - b_{i\min})*p.$$

$$b_1 = 63 + (84-63)*0.8 = 79.8,$$

$$b_2 = 35 + (70-35)*0.8 = 63,$$

$$b_3 = 140 + (168-140)*0.8 = 162.4.$$

Замінюємо нерівності на рівності:

$$F = 8 * X_1 + 9 * X_2 \to \max, \quad (1)$$

$$0.365 * X_1 + 0.083 * X_2 = 79.8, \quad (2)$$

$$0.533 * X_1 + 0.04 * X_2 = 63, \quad (3)$$

$$0.35 * X_2 = 162.4. \quad (4)$$

Ми отримали рівняння для прямих ліній. Розв’язуємо рівняння:

1) $F = 8 * X_1 + 9 * X_2 = 1000$, $8 * X_1 + 9 * 0 = 1000$, $\underline{X_1 = 125}$.

$F = 8 * X_1 + 9 * X_2 = 1000$, $8 * 0 + 9 * X_2 = 1000$, $\underline{X_2 = 111}$.

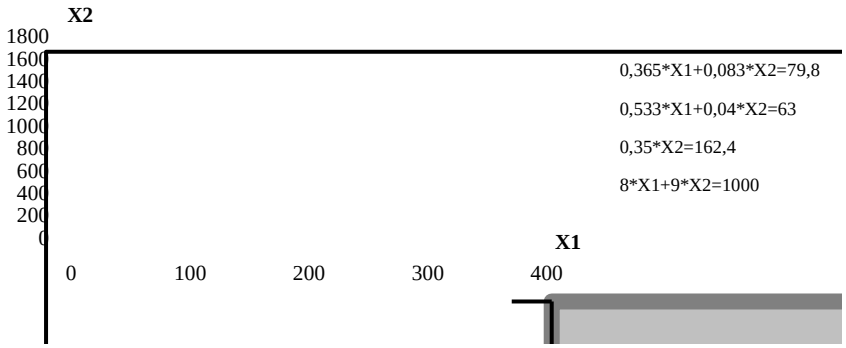
2) $0.365 * X_1 + 0.083 * X_2 = 79.8$, $0.365 * X_1 + 0.083 * 0 = 79.8$, $\underline{X_1 = 218.6}$.

$0.365 * X_1 + 0.083 * X_2 = 79.8$, $0.365 * 0 + 0.083 * X_2 = 79.8$, $\underline{X_2 = 961.4}$.

3) $0.533 * X_1 + 0.04 * X_2 = 63$, $0.533 * X_1 + 0.04 * 0 = 63$, $\underline{X_1 = 118.2}$.

$0.533 * X_1 + 0.04 * X_2 = 63$, $0.533 * 0 + 0.04 * X_2 = 63$, $\underline{X_2 = 1575}$.

4) $0.35 * X_2 = 162.4$, $\underline{X_2 = 464}$.



Знаходимо точки оптимуму:

$F_1 = 8*0 + 9*0 = 0$, $F_2 = 8*0 + 9*961.4 = 4176$,

$F_3 = 8*118.2 + 9*0 = 945.6$, $F_4 = 8*84 + 9*464 = 4843$.

Отже точкою максимуму є (84; 464), а точкою мінімуму (0; 0). Отже максимальний прибуток ми отримаємо, коли будемо випускати 84 кг добрива 1 та 464 кг добрива 2.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Приклад 4. Розв’язати пряму задачу симплексним методом і потім двоїсту по відношенню до неї задачу.

Пряма задача має такий вигляд:

$F = -14 * X_1 + 10 * X_2 \to \min$ - функція мети

$-21 * X_1 + 14 * X_2 \geq -800$ - рівняння обмеження

$-5{,}3 * X_1 + 12 * X_2 \leq 100$ - рівняння обмеження

$5{,}3 * X_1 + 9 * X_2 \leq 60$ - рівняння обмеження

$X_j \geq 0.$

В даному випадку потрібно отримати протилежне спрямування функції мети, помноживши її на (-1), а в першому рівнянні-обмеження множимо ліву та праву частину на (-1).

$$F = 14 * X_1 - 10 * X_2 \to \max \quad (1)$$

$$21 * X_1 - 14 * X_2 \leq 800 \quad (2)$$

$$-5{,}3 * X_1 + 12 * X_2 \leq 100 \quad (3)$$

$$5{,}3 * X_1 + 9 * X_2 \leq 60 \quad (4)$$

$$X_j \geq 0. \quad (5)$$

Перетворюємо ці нерівності у рівності. Візьмемо у якості базових величин X_5, X_6, X_7. Функція мети в цьому випадку залежить лише від небазисних змінних.

$$F = 14 * X_1 - 10 * X_2 = \max \quad (1)$$

$$X_5 = 800 - 21 * X_1 + 14 * X_2 \quad (2)$$

$$X_6 = 100 + 5{,}3 * X_1 - 12 * X_2 \quad (3)$$

$$X_7 = 60 - 5{,}3 * X_1 - 9 * X_2 \quad (4)$$

$$X_j \geq 0. \qquad (5)$$

Всі базисні змінні є додатними і тому ми отримали припустимий початковий розрахунок.

1 крок

Знаходимо найбільший додатній коефіцієнт функції мети – це є 14 при X_1. Розв'язуємо рівняння-обмеження відносно X_1. Найменше значення X_1 визначає базисну змінну, яка переводиться у небазисні.

$$X_1 = \frac{800}{21} = 38 \qquad X_1 = -\frac{100}{5{,}3} = -19 = +\infty,$$

$$X_1 = \frac{60}{5{,}3} = 11.$$

Обравши найменше значення, визначаємо нову базисну змінну:

$$X_1 = \frac{60}{5{,}3} - \frac{9}{5{,}3} * X_2 - \frac{X_7}{5{,}3} = 11{,}32 - 1{,}698 * X_2 - 0{,}188 * X_7$$

2 крок

Нову базисну змінну підставляємо в математичну модель

$$F = 14 * (11{,}32 - 1{,}698 * X_2 - 0{,}188 * X_7) - 10 * X_2 =$$
$$158{,}48 - 23{,}772 * X_2 - 2{,}632 * X_7 - 10 * X_2 =$$
$$158{,}48 - 33{,}772 * X_2 - 2{,}632 * X_7 \to \max$$

$$X_5 = 800 - 21 * (11{,}32 - 1{,}698 * X_2 - 0{,}188 * X_7) + 14 * X_2 =$$
$$800 - 237{,}72 + 35{,}658 * X_2 + 3{,}948 * X_7 =$$
$$562{,}28 + 35{,}658 * X_2 + 3{,}948 * X_7$$

$$X_6 = 100 + 5{,}3 * (11{,}32 - 1{,}698 * X_2 - 0{,}188 * X_7) - 12 * X_2 =$$
$$100 + 59{,}996 - 8{,}999 * X_2 -{,}996 * X_7 =$$
$$159{,}996 - 8{,}999 * X_2 -{,}996 * X_7$$

$$X_1 = \frac{60}{5,3} - \frac{9}{5,3} * X_2 - \frac{X_7}{5,3} = 11,32 - 1,698 * X_2 - 0,188 * X_7$$

На першому кроці функція мети збільшилась до 158,48 і це означає рух у вірному напрямку але так як всі коефіцієнти функції мети від'ємні, то ми припиняємо розрахунок.

З розрахунків випливають такі висновки:

- найбільше значення $F = 158,48$;

- всі значення базисних змінних:

$X_1 = 11,32$ $\quad$ $X_4 = 0,$

$X_2 = 0,$ $\quad$ $X_5 = 562,28$

$X_3 = 0,$ $\quad$ $X_6 = 159,996$ $\quad$ $X_7 = 0.$

Розв'яжемо двоїсту задачу. Знайдемо коефіцієнти рівнянь-обмежень, використавши матрицю коефіцієнтів рівнянь-обмежень прямої задачі.

$$A = \begin{vmatrix} 21 & -14 \\ -5,3 & 12 \\ 5,3 & 9 \end{vmatrix}$$

Транспонувавши дану матрицю, отримаємо матрицю коефіцієнтів В:

$$B = \begin{vmatrix} 21 & -14 \\ -5,3 & 12 \\ 5,3 & 9 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 21 & -5,3 & 5,3 \\ -14 & 12 & 9 \end{vmatrix}$$

Складаємо двоїсту задачу:

$$F = 800 * Y_1 + 100 * Y_2 + 60 * Y_3 \to \min \qquad (1)$$

$$21 * Y_1 - 5,3 * Y_2 + 5,3 * Y_3 \geq 14 \qquad (2)$$

$$-14 * Y_1 + 12 * Y_2 + 9 * Y_3 \geq -10 \qquad (3)$$

Перепишемо дані рівняння в такому вигляді:

$$F = -800*Y_1 - 100*Y_2 - 60*Y_3 \to \max \quad (1)$$

$$-21*Y_1 + 5{,}3*Y_2 - 5{,}3*Y_3 \le -14 \quad (2)$$

$$14*Y_1 - 12*Y_2 - 9*Y_3 \le 10 \quad (3)$$

Перетворюємо нерівності в рівняння:

$$F = -800*Y_1 - 100*Y_2 - 60*Y_3 \to \max \quad (1)$$

$$-21*Y_1 + 5{,}3*Y_2 - 5{,}3*Y_3 + Y_4 = -14 \quad (2)$$

$$14*Y_1 - 12*Y_2 - 9*Y_3 + Y_5 = 10 \quad (3)$$

Переписуємо ці рівняння в даному вигляді:

$$F = -800*Y_1 - 100*Y_2 - 60*Y_3 \to \max \quad (1)$$

$$Y_4 = -14 + 21*Y_1 - 5{,}3*Y_2 + 5{,}3*Y_3 \quad (2)$$

$$Y_5 = 10 - 14*Y_1 + 12*Y_2 + 9*Y_3 \quad (3)$$

1 крок

$$Y_3 = \frac{14}{5{,}3} - \frac{21}{5{,}3}*Y_1 + \frac{5{,}3}{5{,}3}*Y_2 + \frac{1}{5{,}3}*Y_4 =$$
$$= 2{,}641 - 3{,}962*Y_1 + Y_2 + 0{,}189*Y_4$$

Підставляємо значення Y_3 у відповідні рівняння:

$$F = -800*Y_1 - 100*Y_2 - 60*(2{,}641 - 3{,}962*Y_1 + Y_2 + 0{,}189*Y_4) =$$
$$-800*Y_1 - 100*Y_2 - 147{,}66 + 237{,}72*Y_1 - 60*Y_2 - 11{,}34*Y_4 =$$
$$-147{,}66 - 562{,}28*Y_1 - 160*Y_2 - 11{,}34*Y_4$$

$$Y_5 = 10 - 14*Y_1 + 12*Y_2 + 9*(2{,}641 - 3{,}962*Y_1 + Y_2 + 0{,}189*Y_4) =$$
$$10 - 14*Y_1 + 12*Y_2 + 23{,}769 - 35{,}658*Y_1 + 9*Y_2 + 1{,}701*Y_4 =$$
$$33{,}769 - 46{,}769*Y_1 + 21*Y_2 + 1{,}701*Y_4$$

З розрахунків випливають такі висновки:

- найбільше значення $F = 182{,}2$;

- всі значення базисних змінних:

$Y_1 = 0,$ $Y_3 = 2{,}641$

$Y_2 = 0,$ $Y_4 = 0,$ $Y_5 = 33{,}769.$

☒ <u>Для прямої задачі</u> - найбільше значення $F = 158{,}48$;

- всі значення базисних змінних:

$X_1 = 11{,}32$ $X_4 = 0,$

$X_2 = 0,$ $X_5 = 562{,}28$

$X_3 = 0,$ $X_6 = 159{,}996$ $X_7 = 0.$

☒ <u>Для двоїстої задачі</u> - найбільше значення $F = 182{,}2$;

- всі значення базисних змінних:

$Y_1 = 0,$ $Y_3 = 2{,}641$

$Y_2 = 0,$ $Y_4 = 0,$ $Y_5 = 33{,}769.$

Приклад 5. Розв'язати двоїстим симплекс методом задачу лінійного програмування, яка має такий вигляд:

$$F = 7 * X_1 + 5 * X_2 \to \min \qquad F = -7 * X_1 - 5 * X_2 \to \max$$

$$-7 * X_1 + 2 * X_2 \geq 10 \qquad 7 * X_1 - 2 * X_2 \leq -10$$

$$5 * X_1 - 2{,}65 * X_2 \geq 20 \qquad -5 * X_1 + 2{,}65 * X_2 \leq -20$$

$$7 * X_1 + 7 * X_2 \leq 40 \qquad 7 * X_1 + 7 * X_2 \leq 40$$

$$X_j \geq 0,\ j = 1 \ldots 5 \qquad X_j \geq 0,\ j = 1 \ldots 5$$

Приведемо цю модель до канонічної форми:

$$F = -7 * X_1 - 5 * X_2 \to \max$$

$$7 * X_1 - 2 * X_2 + X_3 = -10$$

$$-5 * X_1 + 2{,}65 * X_2 + X_4 = -20$$

$$7*X_1+7*X_2+X_5=40$$

$$X_j \geq 0,\ j=1\ldots5$$

Записуємо цю задачу у симплекс таблицю:

i	*Базисні змінні*	*Змінні*					b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	X_3	*7*	*-2*	*1*	*0*	*0*	*-10*
2	X_4	*-5*	*2,65*	*0*	*1*	*0*	*-20*
3	X_5	*7*	*7*	*0*	*0*	*1*	*40*
0	*F*	*7*	*5*	*0*	*0*	*0*	*0*

Визначаємо вирішальний рядок та вирішальний елемент. В даному випадку вирішальний рядок e=2, а вирішальний елемент k=1. Далі застосовуємо метод Жордана - Гауса.

Виконуємо розрахунки:

i=2

$$a'_{ej}=\frac{a_{ej}}{a_{ek}};b'_e=\frac{b_e}{a_{ek}};$$

$$a'_{21}=\frac{a_{21}}{a_{21}}=\frac{-5}{-5}=1 \qquad a'_{24}=\frac{a_{24}}{a_{21}}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$$

$$a'_{22}=\frac{a_{22}}{a_{21}}=\frac{2,65}{-5}=-0,53 \qquad a'_{25}=\frac{a_{25}}{a_{21}}=\frac{0}{-5}=0$$

$$a'_{23}=\frac{a_{23}}{a_{21}}=\frac{0}{-5}=0 \qquad b'_1=\frac{b_1}{a_{21}}=\frac{-20}{-5}=4$$

i=1

$$a'_{ij}=a_{ij}-a_{ej}*\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];b'_i=b_i-b'_e*\left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];$$

$$a'_{11}=a_{11}-a_{21}*\left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right]=7-(-5)*\left[\frac{7}{-5}\right]=0$$

$$a'_{14}=a_{14}-a_{24}*\left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right]=0-1*\left[\frac{7}{-5}\right]=\frac{7}{5}$$

$$a'_{12} = a_{12} - a_{22} * \left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = -2 - 2{,}65 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 5{,}71$$

$$a'_{15} = a_{15} - a_{25} * \left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = 0 - 0 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 0$$

$$a'_{13} = a_{13} - a_{23} * \left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = 1 - 0 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 1$$

$$b'_1 = b_1 - b_2 * \left[\frac{a_{11}}{a_{21}}\right] = -10 - (-20) * \left[\frac{7}{-5}\right] = -38$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej} * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; b'_i = b_i - b'_e * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];$$

i=3

$$a'_{31} = a_{31} - a_{21} * \left[\frac{a_{31}}{a_{21}}\right] = 7 - (-5) * \left[\frac{7}{-5}\right] = 0$$

$$a'_{34} = a_{34} - a_{24} * \left[\frac{a_{31}}{a_{21}}\right] = 0 - 1 * \left[\frac{7}{-5}\right] = \frac{7}{5}$$

$$a'_{32} = a_{32} - a_{22} * \left[\frac{a_{31}}{a_{21}}\right] = 7 - 2{,}65 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 10{,}71$$

$$a'_{35} = a_{35} - a_{25} * \left[\frac{a_{31}}{a_{21}}\right] = 1 - 0 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 1$$

$$a'_{33} = a_{33} - a_{23} * \left[\frac{a_{31}}{a_{21}}\right] = 0 - 0 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 0$$

$$b'_3 = b_3 - b_2 * \left[\frac{a_{31}}{a_{21}}\right] = 40 - (-20) * \left[\frac{7}{-5}\right] = 12$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej} * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; b'_i = b_i - b'_e * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];$$

i=0

$$a'_{01} = a_{01} - a_{21} * \left[\frac{a_{01}}{a_{21}}\right] = 7 - (-5) * \left[\frac{7}{-5}\right] = 0$$

$$a'_{04} = a_{04} - a_{24} * \left[\frac{a_{01}}{a_{21}}\right] = 0 - 1 * \left[\frac{7}{-5}\right] = \frac{7}{5}$$

$$a'_{02} = a_{02} - a_{22} * \left[\frac{a_{01}}{a_{21}}\right] = 5 - 2{,}65 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 8{,}71$$

$$a'_{05} = a_{05} - a_{25} * \left[\frac{a_{01}}{a_{21}}\right] = 0 - 0 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 0$$

$$a'_{03} = a_{03} - a_{23} * \left[\frac{a_{01}}{a_{21}}\right] = 0 - 0 * \left[\frac{7}{-5}\right] = 0$$

$$b'_0 = b_0 - b_2 * \left[\frac{a_{01}}{a_{21}}\right] = 0 - (-20) * \left[\frac{7}{-5}\right] = -28$$

Заповнюємо наступну таблицю:

i	*Базисні змінні*	*Змінні*					b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	X_3	*0*	*5,71*	*1*	*7/5*	*0*	*-38*
2	X_1	*1*	*-0,53*	*0*	*-1/5*	*0*	*4*
3	X_5	*0*	*10,71*	*0*	*7/5*	*1*	*12*
0	*F*	*0*	*8,71*	*0*	*7/5*	*0*	*-28*

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 6. Розв’язати цілочисельним методом задачу лінійного програмування:

$$F = 10 * X_1 + 3 * X_3 = -60$$

$$-\frac{1}{7} * X_1 + X_2 + \frac{4}{7} * X_3 = \frac{14}{5}$$

$$-2 * X_1 + \frac{5}{7} * X_3 + X_4 = \frac{6}{7}$$

Записуємо цю задачу у симплекс таблицю:

i	*Базисні змінні*	*Змінні*				b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	
1	X_2	*-1/7*	*1*	*4/7*	*0*	*14/5*
2	X_4	*-2*	*0*	*5/7*	*1*	*6/7*
0	*F*	*10*	*0*	*3*	*0*	*-60*

$$-\frac{1}{7} - [-1] = \frac{6}{7} \qquad 2\frac{4}{5} - 2 = \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{7} X_1 + 0 + \frac{4}{7} * X_3 \geq \frac{4}{5}$$

$$-\frac{6}{7} X_1 - \frac{4}{7} * X_3 \leq -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{6}{7} X_1 - \frac{4}{7} * X_3 + X_5 = -\frac{4}{5}$$

i	*Базисні змінні*	*Змінні*					b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	X_2	*-1/7*	*1*	*4/7*	*0*	*0*	*14/5*
2	X_4	*-2*	*0*	*5/7*	*1*	*0*	*6/7*
3	X_5	*-6/7*	*0*	*-4/7*	*0*	*1*	*-4/5*
0	*F*	*10*	*0*	*3*	*0*	*0*	*-60*

Знаходимо вирішальний елемент:

$$\left|\frac{a_{01}}{-a_{31}}\right| = \frac{10*7}{6} = \frac{70}{6} = 11\frac{2}{3} \qquad \left|\frac{a_{03}}{-a_{33}}\right| = \frac{3*7}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

Отже, ми визначили вирішальний елемент $-\frac{4}{7}$.

В даному випадку вирішальний рядок e=3, а вирішальний елемент k=3. Далі застосовуємо метод Жордана - Гауса.

Виконуємо розрахунки:

i=3

$$a'_{ej} = \frac{a_{ej}}{a_{ek}}; b'_e = \frac{b_e}{a_{ek}};$$

$$a'_{31} = \frac{a_{31}}{a_{33}} = \left(-\frac{6}{7}\right):\left(-\frac{4}{7}\right) = 1\frac{1}{2}$$

$$a'_{32} = \frac{a_{32}}{a_{33}} = 0:\left(-\frac{4}{7}\right) = 0$$

$$a'_{33} = \frac{a_{33}}{a_{33}} = \left(-\frac{4}{7}\right):\left(-\frac{4}{7}\right) = 1$$

$$a'_{34} = \frac{a_{34}}{a_{33}} = 0:\left(-\frac{4}{7}\right) = 0$$

$$a'_{35} = \frac{a_{35}}{a_{33}} = 1:\left(-\frac{4}{7}\right) = -1\frac{3}{4}$$

$$b'_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{4}{7}\right) = 1\frac{2}{5}$$

i=1

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej} * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; b'_i = b_i - b'_e * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];$$

$$a'_{11} = a_{11} - a_{31} * \left[\frac{a_{13}}{a_{33}}\right] = -\frac{1}{7} - \left(-\frac{6}{7}\right) * \left[\frac{4}{7}:\left(-\frac{4}{7}\right)\right] = -1$$

$$a'_{12} = a_{12} - a_{32} * \left[\frac{a_{13}}{a_{33}}\right] = 1 - 0 * \left[\frac{4}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 1$$

$$a'_{13} = a_{13} - a_{33} * \left[\frac{a_{13}}{a_{33}}\right] = \frac{4}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right) * \left[\frac{4}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a'_{14} = a_{14} - a_{34} * \left[\frac{a_{13}}{a_{33}}\right] = 0 - 0 * \left[\frac{4}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a'_{15} = a_{15} - a_{35} * \left[\frac{a_{13}}{a_{33}}\right] = 0 - 1 * \left[\frac{4}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 1$$

$$b'_1 = b_1 - b_3 * \left[\frac{a_{13}}{a_{33}}\right] = \frac{14}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) * \left[\frac{4}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 2$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ej} * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; b'_i = b_i - b'_e * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];$$

i=2

$$a'_{21} = a_{21} - a_{31} * \left[\frac{a_{23}}{a_{33}}\right] = -2 - \left(-\frac{6}{7}\right) * \left[\frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = -3\frac{1}{14}$$

$$a'_{22} = a_{22} - a_{32} * \left[\frac{a_{23}}{a_{33}}\right] = 0 - 0 * \left[\frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a'_{23} = a_{23} - a_{33} * \left[\frac{a_{23}}{a_{33}}\right] = \frac{5}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right) * \left[\frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a'_{24} = a_{24} - a_{34} * \left[\frac{a_{23}}{a_{33}}\right] = 1 - 0 * \left[\frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 1$$

$$a'_{25} = a_{25} - a_{35} * \left[\frac{a_{23}}{a_{33}}\right] = 0 - 1 * \left[\frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 1\frac{1}{4}$$

$$b_2' = b_2 - b_3 * \left[\frac{a_{23}}{a_{33}}\right] = \frac{6}{7} - \left(-\frac{4}{5}\right) * \left[\frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = -\frac{1}{7}$$

$$a_{ij}' = a_{ij} - a_{ej} * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right]; b_i' = b_i - b_e' * \left[\frac{a_{ik}}{a_{ek}}\right];$$

i=0

$$a_{01}' = a_{01} - a_{31} * \left[\frac{a_{03}}{a_{33}}\right] = 10 - \left(-\frac{6}{7}\right) * \left[3 : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 5\frac{1}{2}$$

$$a_{02}' = a_{02} - a_{32} * \left[\frac{a_{03}}{a_{33}}\right] = 0 - 0 * \left[3 : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a_{03}' = a_{03} - a_{33} * \left[\frac{a_{03}}{a_{33}}\right] = 3 - \left(-\frac{4}{7}\right) * \left[3 : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a_{04}' = a_{04} - a_{34} * \left[\frac{a_{03}}{a_{33}}\right] = 0 - 0 * \left[3 : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 0$$

$$a_{05}' = a_{05} - a_{35} * \left[\frac{a_{03}}{a_{33}}\right] = 0 - 1 * \left[3 : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = 5\frac{1}{4}$$

$$b_0' = b_0 - b_3 * \left[\frac{a_{03}}{a_{33}}\right] = -60 - \left(-\frac{4}{5}\right) * \left[3 : \left(-\frac{4}{7}\right)\right] = -64\frac{1}{5}$$

Заповнюємо наступну таблицю:

i	*Базисні змінні*	*Змінні*					b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	X_2	*-1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*2*
2	X_4	$-3\frac{1}{14}$	*0*	*0*	*1*	$1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{7}$
3	X_5	$1\frac{1}{2}$	*0*	*1*	*0*	$-1\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{5}$
0	*F*	$5\frac{1}{2}$	*0*	*0*	*0*	$5\frac{1}{4}$	$-64\frac{1}{5}$

Згідно з завданням ми повинні зараз додати нову змінну за методом Гоморі, але так як в нас є від'ємний елемент в стовпчику $в_i = -\frac{1}{7}$. Тому застосуємо двоїстий симплекс метод, вибравши вирішальний елемент саме на цьому рядку $-3\frac{1}{14}$.

Щоб полегшити розрахунки використаємо пакет MathCad. Краще для демонстрації правильності попередніх розрахунків почнемо все спочатку. Використаємо матрицю А, дані для якої беремо з таблиці, та матрицю В – квадратну матрицю, де всі елементи дорівнюють 0 за винятком головної діагоналі. На головній діагоналі всі елементи дорівнюють 1 крім вирішального стовпчика.

Отже, сформуємо матрицю А та відповідно матрицю В:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & 1 & \frac{4}{7} & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ -2 & 0 & \frac{5}{7} & 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ \frac{-6}{7} & 0 & \frac{-4}{7} & 0 & 1 & \frac{-4}{5} \\ 10 & 0 & 3 & 0 & 0 & -60 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Розрахуємо наступну матрицю:

$$A1 := B \cdot A$$

Тому наступна матриця має вигляд:

$$A1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3.071 & 0 & 0 & 1 & 1.25 & -0.143 \\ 1.5 & 0 & 1 & 0 & -1.75 & 1.4 \\ 5.5 & 0 & 0 & 0 & 5.25 & -64.2 \end{pmatrix}$$

Порівнявши дану матрицю з даними в таблиці №3, яку ми розрахували раніше, можна зробити висновок про правильність розрахунків.

Далі знову знаходимо вирішальний рядок та відповідно вирішальний елемент, який в даному випадку дорівнює $-3\frac{1}{14}$ і знаходиться в другому рядку.

Використаємо матрицю A1 та складемо матрицю B1:

$$A1 := B \cdot A$$

$$A1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3.071 & 0 & 0 & 1 & 1.25 & -0.143 \\ 1.5 & 0 & 1 & 0 & -1.75 & 1.4 \\ 5.5 & 0 & 0 & 0 & 5.25 & -64.2 \end{pmatrix} \qquad B1 := \begin{pmatrix} \frac{-14}{43} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-14}{43} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{21}{43} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{77}{43} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Виконавши розрахунки отримаємо матрицю A3:

$$A3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-14}{43} & \frac{41}{86} & \frac{88}{43} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-14}{43} & \frac{-35}{86} & \frac{2}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{43} & \frac{-49}{43} & \frac{18}{43} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{77}{43} & 14.2 & -63.944 \end{pmatrix}$$

Помітно, що значення $в_i$ не цілі, то ми змушені виконувати розрахунки далі. Тому знову вибираємо рядок, за допомогою якого за методом Гоморі додаємо наступний рядок з наступною змінною тому запишемо одержану матрицю:

$$A4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-14}{43} & \frac{41}{86} & 0 & \frac{88}{43} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-14}{43} & \frac{-35}{86} & 0 & \frac{2}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{43} & \frac{-49}{43} & 0 & \frac{18}{43} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-21}{43} & \frac{6}{43} & 1 & \frac{-18}{43} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{77}{43} & 14.2 & 0 & -63.944 \end{pmatrix}$$

Складаємо матрицю B та виконавши розрахунки маємо матрицю A5:

$$A5 := B4 \cdot A4$$

$$A5 = \blacksquare$$

Знову за методом Гоморі додаємо рядок і отримуємо матрицю A6, а потім складаємо за даними матриці A6 матрицю B6:

$$A6 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0.384 & -0.667 & 0 & 2.326 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.667 & 0 & 0.326 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.286 & -2.048 & 0 & 0.857 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.333 & 1 & -0.326 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.712 & 3.667 & 0 & -65.479 \end{pmatrix} \qquad B6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.768 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.572 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29.424 & 1 \end{pmatrix}$$

Виконуємо розрахунки:

$A7 := B6 \cdot A6$

$A7 =$ ▮

Знову видно, що дані в останньому рядку не цілі, тому продовжуємо розрахунки. Додавши рядок зі змінною X_8 за методом Гоморі ми отримали матрицю A8 та матрицю B8:

$$A8 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.768 & 0 & 2.076 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.334 & -1 & 0 & 0.652 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.666 & -2 & 0 & 0.652 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1.858 & -0.572 & 0 & 1.043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.666 & -2 & 0 & 0.652 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.077 & -0.768 & 1 & -0.076 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.131 & 29.424 & 0 & -75.071 \end{pmatrix} \qquad B8 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.987 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4.338 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 21.636 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -24.130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8.649 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.987 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -79.623 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножуємо матриці:

$A9 := B8 \cdot A8$

$A9 =$ ▮

Так як ми виконуємо розрахунки з наближеннями тому можна до даних розрахунків застосувати округлення. Перепишемо цю матрицю, округливши числа:

$$A10 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -12 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3 & -4.3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18.6 & 21.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 18 & -24.1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.64 & 8.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90.6 & -79.6 & -69 \end{pmatrix}$$

Отже, розрахунки закінчені, тому що значення $в_i$ цілі.

i	*Базисні змінні*	*Змінні*								b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
1	X_2	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*10*	*-12*	*3*
2	X_4	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*2,3*	*-4,3*	*1*
3	X_5	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*-18,6*	*21,6*	*1*
4	X_6	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*18*	*-24,1*	*3*
5	X_7	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*-8,64*	*8,65*	*0*
6	X_8	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*10*	*-13*	*1*
0	*F*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*90,6*	*-79,6*	*-69*

Приклад 7. Методом гілок та меж визначити кількість виробів у цілочисельному вигляді, яка б забезпечила максимально можливе завантаження обладнання підприємства на запланований період за даними таблиці:

Табл. 1

Групи обладнання	*Норма часу*				*Фонд часу*
	X_1	X_2	X_3	X_4	
А	*1*	*3*	*1*	*2,116*	*105*
Б	*0,6*	*2*	*3*	*0,3*	*140*
В	*1,323*	*1,5*	*2*	*1,323*	*30*

Так як ми маємо наступне відношення $\mathbf{X_1{:}X_4{=}1{:}2}$ створюємо слідуючи таблицю: $(X_1)' = (X_1 + 2 * X_4)$ - комплект.

Табл. 2

Групи обладнання	*Норма часу*			*Фонд часу*
	X_1	X_2	X_3	
А	*5,232*	*3*	*1*	*105*
Б	*1,2*	*2*	*3*	*140*
В	*3,969*	*1,5*	*2*	*30*

Розрахунки:

$$(X_1)^A = (1 + 2 * 2{,}116) = 5{,}232$$

$$(X_1)^Б = (0{,}6 + 2 * 0{,}3) = 1{,}2$$

$$(X_1)^B = (1{,}323 + 2 * 1{,}323) = 3{,}969$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5.232 * X_1' + 3 * X_2 + X_3 \le 105 \\ 1.2 * X_1' + 2 * X_2 + 3 * X_3 \le 140 \\ 3.969 * X_1' + 1.5 * X_2 + 2 * X_3 \le 30 \end{cases}$$

Розв'язавши систему ми отримали такі результати:

$$X_1' = -23.94, \quad X_2 = 74.55, \quad X_3 = 6.593, \quad X_4 = -47.88.$$

З отриманих вище значень змінних можна зробити висновок, що система не сумісна. Тому припиняємо всі розрахунки.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Приклад 8. Отримати початковий розподіл транспортної задачі методами Північно-західного кута; найменших витрат для користувачів.

	63	42	63
63	8	6	4
56	4	9	5
49	4	3	7

1. Метод північно-західного кута полягає в тому, що ми повинні рухатися з лівого верхнього кута до правого нижнього.

	63	42	63
63	8 63	6	4
56	4 0	9 42	5 14
49	4	3	7 49

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, але в даному випадку 4, тому додаємо до будь-якої комірки нульове постачання.

Знаходимо значення функції мети:

$$F_1 = 8*63 + 9*42 + 5*14 + 7*49 = 1295.$$

2. Метод найменших витрат для користувачів полягає в тому, що перший користувач забирає найкраще постачання (з найменшою вартістю). Інші користувачі керуються таким же самим правилом.

63	42	63

63	8	6	4 63
56	4 56	9	5 0
49	4 7	3 42	7

$m+n-1=3+3-1=5$, але в даному випадку 4, тому додаємо до будь-якої комірки нульове постачання. Знаходимо значення функції мети: $F_2=4*56+4*7+3*42+5*0+4*63=630$.

Отже, початковий розподіл транспортної задачі наступними методами та розрахувала такі значення функції мети Північно-західного кута $F_1=1295$; Найменших витрат для користувачів $F_2=630$.

Розв’язати транспортну задачу за методом потенціалів при початковому розподілі за методом північно-західного кута.

	70	41	79
20	7	10	14
30	7	8	20
70	12	14	8
70	15	3	7

Спочатку заповнюємо таблицю за методом північно-західного кута, знаходимо коефіцієнти α та β за формулою: $C_{ij}-(\alpha_{ij}+\beta_{ij})=0$, і розраховуємо потенціали комірок за формулою: $\gamma_{ij}=C_{ij}-(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$.

		70	41	79
$\alpha_1=0$	20	7 20	10 2	14 11

$\alpha_2 = 0$	30	7 30	8 0	20 17
$\alpha_3 = 5$	70	12 20	14 41	8 9
$\alpha_4 = 4$	70	15 4	3 -9	7 70
		$\beta_1 = 7$	$\beta_2 = 8$	$\beta_3 = 3$

Після заповнення таблиці ми бачимо, що в нас є від’ємний потенціал, а це означає, що ми ще не знайшли оптимального рішення і треба продовжувати розрахунки. Малюємо цикл по заповнених комірках, в даному випадку він може бути лише одним і серед парних комірок обираємо найменше постачання та переносимо це постачання в комірку з потенціалом -9. А далі знову робимо розподіл за методом північно-західного кута.

		70	41	79
$\alpha_1 = 0$	20	7 20	10 11	14 11
$\alpha_2 = 0$	30	7 30	8 9	20 17
$\alpha_3 = 5$	70	12 20	14 10	8 50
$\alpha_4 = 4$	70	15 4	3 41	7 29
		$\beta_1 = 7$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 3$

Як ми бачимо: всі потенціали додатні, а це означає, що ми знайшли оптимальне рішення і тепер можна знайти функцію мети: F = 7*20+7*30+12*20+3*41+7*29+8*50 = 1316

Метод за середнім значенням полягає в тому, що ми розглядаємо осереднені коефіцієнти.

$$K_{ij} = C_{ij} - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Cij + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Cij)$$

Отримуємо від'ємні значення K_{ij} і заповнюємо починаючи з найменшого значення переміщуючись у напрямку зростання, і кожного разу забираємо максимальне значення навантаження.

$$K_{ij} = c_{ij} - (c_{pi} + c_{kj}), \quad c_{pi} = \frac{1}{n} * \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, \qquad c_{kj} = \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{m} c_{ij}.$$

Виконуємо розрахунки:

c_{p1} = 1/3*(7+10+14) =10.3; c_{k1} = 1/4*(7+7+12+15) =10.25;

c_{p2} = 1/3*(7+8+20) =11.6; c_{k2} = 1/4*(10+8+14+3) =8.75;

c_{p3} = 1/3*(12+14+8) =11.37; c_{k3} = 1/4*(14+20+8+7) =12.25;

c_{p4} =1/3*(15+3+7) =8.3;

K_{11} = 7- (10.3+10.25) = - 13.55; K_{12} = 10 – (10.3+8.75)=-9.05;

K_{13} = 14-(10.3+12.25)=-8.55; K_{21} = 7 - (11.6+10.25)=-14.85;

K_{22} = 8 - (11.6+8.75)=-12.35; K_{23} = 20 - (11.6+12.25)=-3.85;

K_{31} = 12 - (11.3+10.25)=-9.55; K_{32} = 14 - (11.3+8.75)=-6.05;

K_{33} = 8 - (11.3+12.25)=-15.55; K_{41} = 15 - (8.3+10.25)=-3.55;

K_{42} = 3 - (8.3+8.75)=-14.75; K_{43} = 7 - (8.3+12.25)=-13.55.

	70	41	79
20	7 -13.55 20	10 -9.05	14 -8.55
30	7 -14.85 30	8 -12.35	20 -3.85
70	12 -9.55	14 -6.05	8 -15.55 70
70	15 -3.55 20	3 -14.05 41	7 -13.55 9

Знаходимо значення функції мети:

F= 7*20+7*30+8*70+15*20+3*41+7*9 = 1396

Отже, метод потенціалів більш ефективний ніж метод усереднених коефіцієнтів. Такий висновок можна зробити із значень функцій мети: F = 1316 – за методом потенціалів; F = 1396 – за методом усереднених коефіцієнтів.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Приклад 9. Розв’язати задачу комівояжера двома способами:

1. методом редукції рядків та колонок;
2. осереднених коефіцієнтів.

Комівояжер відвідує n=5 міст, відвідуючи кожне місто лише 1 раз. Після цього він повертається в початкову точку (1). Функція мети – мінімальна величина підсумкового шляху між містами.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	N	60	20*A	5*A
2	2*A	-	40	80	100
3	140	150	-	2*N	70
4	40*A	120	70	-	N
5	3*N	A+6	4*N	90	-

Обираємо довільний шлях.

Табл.1

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	7	60	60	15
2	6	-	40	80	100
3	140	150	-	14	70
4	120	120	70	-	7
5	21	9	28	90	-

Тоді F_{max} =7+40+14+7+21=89. Тепер починаємо перший етап розрахунків, усього цих етапів буде n – 2 = 3.

(1-2)	7
(2-3)	40
(3-4)	14
(4-5)	7
(5-1)	21

Перший етап. Вводимо колонку редукції рядків A_i, в якій записуємо мінімальне значення для кожного рядка. Далі складаємо нову табл.3, де елементи рядків початкової таблиці зменшуються на величину A_i. Тому у кожному рядку з’являється хоча б один нуль.

Табл.2

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	7	60	60	15	7
2	6	-	40	80	100	6
3	140	150	-	14	70	14
4	120	120	70	-	7	7
5	21	9	28	90	-	9

Табл.3

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	0	53	53	8	7
2	0	-	34	74	94	6
3	126	136	-	0	56	14
4	113	113	63	-	0	7
5	12	0	19	81	-	9

Робимо додаткову редукцію колонок, щоб отримати у кожній колонці і рядку хоча б один 0.

Табл.4

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	0	53	53	8	7
2	0	-	34	74	94	6
3	126	136	-	0	56	14
4	113	113	63	-	0	7
5	12	0	19	81	-	9
$\mathbf{B_j}$	0	0	19	0	0	

Табл.5

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	0	34	53	8	7
2	0	-	15	74	94	6
3	126	136	-	0	56	14
4	113	113	44	-	0	7
5	12	0	0	81	-	9
$\mathbf{B_j}$	0	0	19	0	0	

З даних табл.5 розраховуємо F_{min}, яке рівне:

$$F_{min} = \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{j=1}^{n} B_j = 7+6+14+7+9+0+0+19+0+0 = 62.$$

Таким чином розраховане значення повинно бути:

$$F_{min} \leq Fроз \leq F_{max},\ 62 \leq Fроз \leq 89.$$

Розрахуємо штрафи для кожного рядка і кожної колонки:

Табл.6

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**A_i**	**Штраф**
1	-	0	34	53	8	7	*8*
2	0	-	15	74	94	6	*15*
3	126	136	-	0	56	14	*56*
4	113	113	44	-	0	7	*44*
5	12	0	0	81	-	9	*0*
B_j	0	0	19	0	0		
Штраф	*12*	*0*	*15*	*53*	*8*		

Складаємо таблицю штрафів для кожної нульової комірки.

Табл.7

Комірка	(1,2)	(2,1)	(3,4)	(4,5)	(5,2)	(5,3)
Штраф	8+0=8	12+15=27	56+53=109	8+44=52	0+0=0	0+15=15

З цих штрафів обираємо максимальний – 109, **комірки (3, 4).** Ця комірка входить в шлях комівояжера, тому з таблиці викреслюємо четверту колонку і третій рядок. У нас залишається скорочена таблиця. Для неї знову повторюємо все спочатку. Тобто розпочинаємо **другий етап**. Але оскільки кожен рядок і колонка мають 0 ми не робимо редукції.

Табл.8

n	**1**	**2**	**3**	**5**	**A_i**	**Штраф**
1	-	0	34	8	0	*8*
2	0	-	15	94	0	*15*
4	113	113	44	0	0	*44*
5	12	0	0	-	0	*0*
B_j	0	0	0	0		
Штраф	*12*	*0*	*15*	*8*		

Табл.9

Комірка	(1,2)	(2,1)	(4,5)	(5,2)	(5,3
Штраф	8+0=8	15+12=27	44+8=52	0+0=0	0+15=15

З цих штрафів обираємо максимальний – 52, **комірки (4,5).** Ця комірка входить в шлях комівояжера, тому з таблиці викреслюємо п’яту колонку і четвертий рядок. У нас залишається скорочена таблиця. Для неї знову повторюємо все спочатку. Тобто розпочинаємо **третій етап**. Але оскільки кожен рядок і колонка мають 0 ми не робимо редукції.

Табл.10

n	**1**	**2**	**3**	**A_i**	**Штраф**
1	-	0	34	0	*34*
2	0	-	15	0	*15*
5	12	0	0	0	*0*
B_j	0	0	0		
Штраф	*12*	*0*	*15*		

Знову складаємо таблицю штрафів для нульових комірок.

Комірка	(1,2)	(2,1)	(5,2)	(5,3)
Штраф	0+34=34	15+12=27	0+0=0	0+15=15

Табл.11

(1-2)	7
(2-3)	40
(3-4)	14
(4-5)	7
(5-1)	21

З цих штрафів обираємо максимальний – 34, **комірки (1,2).** Ця комірка входить в шлях комівояжера, тому з таблиці викреслюємо перший рядок і другу колонку. У нас залишається скорочена таблиця, яка має 2 рядки і 2 колонки. Робимо заборону комірки і в результаті отримуємо остаточні шляхи комівояжера **(2, 3) і (5,1)**.

Табл.12

n	**1**	**3**
2	-	15
5	12	-

Перевіряємо шлях на зв’язність. Ми отримали довжину шляху 89.

$$F_{min} \leq F_{роз} \leq F_{max}, \qquad 62 \leq 89 \leq 89.$$

Перевіримо отриманий результат заборонивши в початковій таблиці використання комірки (3,4).

Табл.13

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	7	60	60	15	7
2	6	-	40	80	100	6
3	140	150	-	-	70	70
4	120	120	70	-	7	7
5	21	9	28	90	-	9
$\mathbf{B_j}$						

Табл.14

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	0	53	53	8	7
2	0	-	34	74	94	6
3	70	80	-	-	0	70
4	113	113	63	-	0	7
5	12	0	19	81	-	9
$\mathbf{B_j}$	12	0	19	53	0	

Табл.15

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{A_i}$
1	-	0	34	0	8	7
2	0	-	15	21	94	6
3	58	80	-	-	0	70
4	101	113	44	-	0	7
5	0	0	0	28	-	9
$\mathbf{B_j}$	12	0	19	53	0	

Тоді $F_{min} = \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{j=1}^{n} B_j = 7+6+70+7+9+12+0+19+53+0 = 183.$

Це вказує, розрахунок отриманий вище є вірним.

Приклад 10. Розрахуємо дану задачу **методом осереднених коефіцієнтів.** Запишемо дану задачу для конкретного варіанту.

Табл.1

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	7	60	60	15
2	6	-	40	80	100
3	140	150	-	14	70
4	120	120	70	-	7
5	21	9	28	90	-

Перший етап. Розраховуємо середнє значення довжини шляху для кожного рядка і кожної колонки.

Табл.2

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	C_{pi}
1	-	7	60	60	15	28,4
2	6	-	40	80	100	45,2
3	140	150	-	14	70	74,8
4	120	120	70	-	7	63,4
5	21	9	28	90	-	29,6
C_{kj}	57,4	57,2	39,6	48,8	38,4	

Для кожної комірки розраховуємо коефіцієнт, який дорівнює різниці довжини шляху цієї комірки і суми середніх значень шляху для рядка і колонки. Найменше значення коефіцієнту – 109,6. Отримана частина шляху комівояжера **(3-4).**

Табл.3

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	C_{pi}
1	-	**7** -78,6	**60** -8	**60** -17,2	**15** -51,8	28,4
2	**6** -96,6	-	**40** -44,8	**80** -14	**100** 16,4	45,2
3	**140** 7,8	**150** 18	-	**14** -109,6	**70** -43,2	74,8
4	**120** -0,8	**120** -0,6	**70** -33	-	**7** -94,8	63,4
5	**21** -66	**9** -77,8	**28** -41,2	**90** 11,6	-	29,6
C_{kj}	57,4	57,2	39,6	48,8	38,4	

Викреслюємо другий рядок і першу колонку і переходимо до другого етапу.

Другий етап. Розраховуємо середнє значення довжини шляху для кожного рядка і кожної колонки.

Табл.3

n	**1**	**2**	**3**	**5**	**C_{pi}**
1	-	**7** -47,5	**60** -10	**15** -36	20,5
2	**6** -67,25	-	**40** -46	**100** 33	36,5
4	**120** 4	**120** 6,75	**70** -58,75	**7** -102,75	79,25
5	**21** -30,25	**9** -39,5	**28** -36	-	14,5
C_{kj}	36,75	34	49,5	30,5	

Для кожної комірки розраховуємо коефіцієнт, який дорівнює різниці довжини шляху цієї комірки і суми середніх значень шляху для рядка і колонки.

Найменше значення коефіцієнту - -102,75. Отже, отримана частина шляху комівояжера **(4-5)**. Викреслюємо перший рядок і другу колонку і переходимо до третього етапу.

Третій етап. Розраховуємо середнє значення довжини шляху для кожного рядка і кожної колонки.

Табл.4

n	**1**	**2**	**3**	**C_{pi}**
1	-	**7** -20,6	**60** -4,9	22,3
2	**6** -18,3	-	**40** -17,9	15,3
5	**21** -4	**9** -15,6	-	19,3
C_{kj}	9	5,3	42,6	

Для кожної комірки розраховуємо коефіцієнт, який дорівнює різниці довжини шляху цієї комірки і суми середніх значень шляху для рядка і колонки.

Найменше значення коефіцієнту - -20,6. Отже, отримана частина шляху комівояжера **(1-2)**.

Табл.5

n	**1**	**3**	**C_{pi}**
2	**-**	**40** -17,9	
5	**21** -4	**-**	
C_{kj}			

Викреслюємо третій рядок і четверту колонку і отримуємо останню таблицю. У цій таблиці забороняємо комірку і маємо остаточний шлях комівояжера **(2-3) і (5-1).**

Табл.6

n	**1**	**3**
2	**-**	**40** -17,9
5	**21** -4	**-**

Підрахуємо довжину остаточного шляху комівояжера, перевіривши його на зв’язність. Ми отримали довжину шляху 89.

Мінімальний шлях отриманий методом редукції -89, методом осереднених коефіцієнтів -89. Як бачимо довжина шляху однакова. Маршрут 1-2-3-4-5-1.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 11. Розв’язати задачу нелінійного програмування методом множників Лагранжа.

Функція мети:

$$F = (4 * X_1 - N)^2 + (X_2 - 3 * N)^2 \to \min$$

$$3 * X_1 + A * X_2 = N$$

Підставляємо дані відповідно до варіанту:

$$F = (4 * X_1 - 7)^2 + (X_2 - 21)^2 \to \min$$

$$3 * X_1 + 3 * X_2 = 7$$

Розв’язок:

$$L(X_1, X_2, \lambda) = (4 * X_1 - 7)^2 + (X_2 - 21)^2 + \lambda * (7 - 3 * X_1 - 3 * X_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2 * (4 * X_1 - 7) - 3 * \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2 * (X_2 - 21) - 3 * \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 7 - 3 * X_1 - 3 * X_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2 * (4 * X_1 - 7) - 3 * \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2 * (X_2 - 21) - 3 * \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 7 - 3 * X_1 - 3 * X_2 = 0$$

Розв'язуємо систему:

$$7-3*X_1=3*X_2 \Rightarrow X_2=\frac{7}{3}-X_1$$

$$\begin{cases}2*(4*X_1-7)-3*\lambda=0\\ 2*(\frac{7}{3}-X_1-21)-3*\lambda=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8*X_1-14-3*\lambda=0\\ 4\frac{2}{3}-2*X_1-42-3*\lambda=0\end{cases}$$

$$10*X_1+23\frac{1}{3}=0 \Rightarrow X^0{}_1=-\frac{7}{3}; X^0{}_2=\frac{7}{3}-X_1=\frac{7}{3}+\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\lambda=\frac{8*X_1-14}{3}=\frac{8*(-\frac{7}{3})-14}{3}=-10\frac{1}{9}$$

Оптимальне значення функції мети:

$$F^0{}_{опт}=(4*X_1-7)^2+(X_2-21)^2=$$

$$=(4*\left(-\frac{7}{3}\right)-7)^2+(\frac{14}{3}-21)^2=533{,}55$$

$$3*X_1{}^0+3*X_2{}^0=3*\left(-\frac{7}{3}\right)+3*\frac{14}{3}=7$$

Здійснюємо перевірку:

$$X_1=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}\approx-2; X_2=\frac{7}{3}-X_1=\frac{7}{3}-(-2)=4\frac{1}{3}$$

$$F^0{}_{опт}=(4*X_1-7)^2+(X_2-21)^2=(4*(-2)-7)^2+$$

$$+(4\frac{1}{3}-21)^2=277{,}77+256=533{,}77$$

Отже, ми знаходимося в точці мінімуму. Отримано наступні результати:

$$X^0{}_1=-\frac{7}{3}; X^0{}_2=\frac{14}{3}$$

$$F^0{}_{опт}=533{,}55$$

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 12. Визначити термін оптимальної заміни обладнання. Початкова вартість обладнання V_0 =15N тис. грн., VZ_t=0 тис. грн.

Характеристика обладнання, тис. грн.	Вік обладнання t					
	0	1	2	3	4	5
P_t	30N+A	27N+2	23N	20N	17N	12N
EK_t	6N	8N	10N	11N	12N	13N

Заповнюємо таблицю відповідно до варіанту:

Характеристика обладнання, тис. грн.	Вік обладнання t					
	0	1	2	3	4	5
P_t	213	191	161	140	119	84
EK_t	42	56	70	77	84	91

При експлуатації виникає потреба заміни обладнання внаслідок зменшення прибутків по таких причинах:

1.Вартість продукції P_t із зростанням часу t зменшується як через фізичне старіння так і через зростаючі витрати на ремонт.

2.Експлуатаційні витрати EK_t з плином часу зростають через витрати на ремонт.

Наша мета – отримати максимальний прибуток і тому, коли цей прибуток зменшується, ми повинні контролювати цей процес і визначити термін, коли обладнання треба змінити на нове.

1.<u>Обладнання не замінюється</u>.

Прибуток дорівнює $f^1_t=P_t - EK_t$.

2.<u>Обладнання замінюється</u>.

Прибуток дорівнює $f^2_t=P_0 – EK_0 – V_0 + VZ_t$,

де P_t, P_0 - вартість продукції, яку випускає обладнання віком t та нове обладнання (при t=0 років);

EK_t, EK_0 - експлуатаційні витрати на обладнання віком t та нове обладнання;

V_0=105 тис. грн. - вартість нового обладнання (купівля, транспортування, встановлення, налагодження).

Якщо $f_t^1 < f_t^2$, то обладнання можна міняти. При цьому ми не розглядаємо прибутки від попередніх та наступних років, вважаємо їх рівними нулю.

Кожний етап розглядається на початку року 5-річчя. На кожному етапі обирається одне з двох можливих рішень: обладнання замінюється або не замінюється у залежності від величини розрахованого підсумкового прибутку. Більший прибуток (з цих двох варіантів) вказує обраний шлях, а менший прибуток визначає заборонений шлях.

Врахуємо, що, внаслідок заміни або не заміни, обладнання може мати такий вік: на етапі 5 t=1, 2, 3, 4 роки; на етапі 4 t=1, 2, 3 роки; на етапі 3 t=1, 2 роки; на етапі 2 t=1, рік; на етапі 1 t=0 років. Розрахунки виконуються по таких формулах для Е-го етапу:

1. <u>Обладнання не замінюється</u>.

Прибуток дорівнює $f_{E,t}^1 = P_t - EK_t + f_{E+1,t+1}^{\max}$, де $f_{E+1,t+1}^{\max}$ - найбільший підсумковий прибуток на наступному (Е+1)-му етапі при експлуатації обладнання віком (t+1) років; цей прибуток для етапу Е=5 дорівнює нулю, бо ми розглядаємо лише 5-річний плановий період (все, що знаходиться за межами цього періоду не враховуємо); Е – поточний номер етапу; (t+1) – вік обладнання у наступному етапі.

Ми розглядаємо 5-річний етап, тому прибутки за межами цього проміжку не розглядаються, тобто прибуток $f^{\max}_{6,1}$=0 і т.д.

Розрахунки розпочинаємо з п’ятого етапу і переміщуємося у початок:

ЕТАП 5. t=1 рік. $f^1_{5,1}=P_1-EK_1+f^{max}_{6,2}=191-56+0=135;$ $f^2_{5,1}=P_0-EK_0-V_0+VZ_1+f^{max}_{6,1}=213-42-105+0+0=66.$
ЕТАП 5. t=2 роки. $f^1_{5,2}=P_2-EK_2+f^{max}_{6,3}=161-70+0=91;$ $f^2_{5,2}=P_0-EK_0-V_0+VZ_2+f^{max}_{6,1}=213-42-105+0+0=66.$
ЕТАП 5. t=3 роки. $f^1_{5,3}=P_3-EK_3+f^{max}_{6,4}=140-77+0=63;$ $f^2_{5,3}=P_0-EK_0-V_0+VZ_3+f^{max}_{6,1}=213-42-105+0+0=66.$
ЕТАП 5. t=4 роки. $f^1_{5,4}=P_4-EK_4+f^{max}_{6,5}=119-84+0=35;$ $f^2_{5,4}=P_0-EK_0-V_0+VZ_4+f^{max}_{6,1}=213-42-105+0+0=66.$
ЕТАП 4. t=1 рік. $f^1_{4,1}=P_1-EK_1+f^{max}_{5,2}=191-56+91=226;$ $f^2_{4,1}=P_0-EK_0-V_0+VZ_1+f^{max}_{5,1}=213-42-105+0+135=201.$
ЕТАП 4. t=2 роки. $f^1_{4,2}=P_2-EK_2+f^{max}_{5,3}=161-70+63=154;$ $f^2_{4,2}=P_0-EK_0-V_0+VZ_2+f^{max}_{5,1}=213-42-105+0+135=201.$
ЕТАП 4. t=3роки. $f^1_{4,3}=P_3-EK_3+f^{max}_{5,4}=140-77+35=98;$ $f^2_{4,3}=P_0-EK_0-V_0+VZ_3+f^{max}_{5,1}=213-42-105+0+135=201.$
ЕТАП 3. t=1 рік. $f^1_{3,1}=P_1-EK_1+f^{max}_{4,2}=191-56+154=289;$ $f^2_{3,1}=P_0-EK_0-V_0+VZ_1+f^{max}_{4,1}=213-42-105+0+226=292.$
ЕТАП 3. t=2 роки. $f^1_{3,2}=P_2-EK_2+f^{max}_{4,3}=161-70+98=189;$ $f^2_{3,2}=P_0-EK_0-V_0+VZ_2+f^{max}_{4,1}=213-42-105+0+226=292.$
ЕТАП 2. t=1 рік. $f^1_{2,1}=P_1-EK_1+f^{max}_{3,2}=191-56+189=324;$ $f^2_{2,1}=P_0-EK_0-V_0+VZ_1+f^{max}_{3,1}=213-42-105+0+289=355.$
ЕТАП 1. t=0 років. $f^1_{1,0}=P_0-EK_0+f^{max}_{2,1}=213-42+324=495.$

На основі розрахунків можна зробити такі висновки (тепер переміщуємось з початку у кінець, з етапу 1 до етапу 2):

1. Найбільший прибуток за 5-річчя – 495 тис. грн. На першому етапі у нас нове обладнання (вартість його придбання

та встановлення нами не враховується, бо це зроблено у минулому 5-річчі), тому питання про заміну не стає.

2. На етапі 2 вік обладнання стане t=1 рік. Згідно розрахунків ми не повинні замінювати обладнання.

3. На етапі 3 вік обладнання стане t=2 роки. Згідно розрахунків ми отримали рівні витрати $f^1_{3,2}= f^2_{3,2}=292$ тис. грн. У таких умовах вважається невигідним замінювати обладнання, бо прибутки залишаються рівними, але через рік ми будемо мати обладнання новіше на 1 рік. Тому обладнання не замінюється.

4. На етапі 4 вік обладнання стане t=3 роки. Згідно розрахунків ми повинні замінити обладнання.

5. На етапі 5 вік обладнання стане t=1 рік. Згідно розрахунків ми не повинні замінювати обладнання.

Отже, найбільший прибуток (495 тис. грн.) і термін заміни обладнання (етап 4).

Приклад 13. Управління виробництвом товарів і запасами на складах:

Обмеження по потужності виробництва $x_t \leq 4$, по кількості місць на складах $S_t \leq 3$.

Витрати на виробництво $CV_t=N(1+0.2x_t)= 7(1+0.2x_t)= 7+1.4x_t$.

Витрати на зберігання на складі $CZ_t=N(0.3+0.2S_t)= 7(0.3+0.2S_t)= 2.1+1.4S_t$.

Характеристика	**Номер етапу, t**			
	1	**2**	**3**	**4**
Склад, S_t	S_1	S_2	S_3	$S_4=0$
Виробництво, x_t	x_1	x_2	X_3	x_4
Попит, P_t	3	1	3	2

При розрахунках витрат будемо вважати, що при відсутності виробництва, витрати на виробництво при $x_t=0$ будуть рівними 7+1.4*0=7; якщо ж нічого не зберігаємо на складі, то витрати на зберігання будуть рівними 2.1+1.4*0=2,1.

Розрахунок починаємо з останнього етапу, переміщуючись на початок, при цьому враховуючи мінімальні витрати наступного етапу. Для стану S_4 відповідні витрати $F_5(S_4)=0$.

E_4: F_4= (7+1.4x_4)+ (2.1+1.4S_4)+ $F_5(S_4)$;

$S_4= S_3+x_4-P_4= S_3+x_4-2$.

Виділяємо комірки, які використовуються з урахуванням попиту $P_4=2$ і відсутності запасів на 4-му етапі:

S_3	x_4				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0			11,9		
1		10,5			
2	9,1				
3					

S_3	x_4	$F_4(S_3)$
0	2	11,9
1	1	10,5
2	0	9,1
3		

Рішення для відповідних комірок:

(0,2) F_4= (7+1.4*2)+ (2.1+0)+0=11,9;

(1,1) F_4= (7+1.4)+ (2.1+0)+0=10,5;

(2,0) F_4= (7+1.4*0)+ (2.1+0)+0=9,1;

S_2	x_3	$F_3(S_2)$
0	3	25,2
1	2	23,8
2	1	22,4
3	0	21

E_3: F_3= (7+1.4x_3)+ (2.1+1.4S_3)+ $F_4(S_3)$;

$S_3= S_2+x_3-P_3= S_2+x_3-3$.

S_2	x_3				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0				25,2	26,6
1			23,8	25,2	26,6
2		22,4	23,8	25,2	
3	21	22,4	23,8		

Рішення для відповідних комірок:

(0,3) F_3= (7+1.4*3)+ (2.1+0)+11,9=25,2;

(0,4) F_3= (7+1.4*4)+ (2.1+1,4)+10,5=26,6;

(1,2) F_3= (7+1.4*2)+ (2.1+0)+11,9=23,8;

(1,3) F_3= (7+1.4*3)+ (2.1+1,4)+10,5=25,2;

(1,4) F_3= (7+1.4*4)+ (2.1+1,4*2)+9,1=26,6;

(2,1) F_3= (7+1.4)+ (2.1+0)+11,9=22,4;

(2,2) F_3= (7+1.4*2)+ (2.1+1,4)+10,5=23,8;

(2,3) F_3= (7+1.4*3)+ (2.1+1,4*2)+11,9=25,2;

(2,4) F_3= (7+1.4*4)+ (2.1+1,4*3)+10,5=29,4;

(3,0) F_3= (7+1.4*0)+ (2.1+0)+11,9=21;

(3,1) F_3= (7+1.4)+ (2.1+1,4)+10,5=22,4;

(3,2) F_3= (7+1.4*2)+ (2.1+1,4*2)+9,1=23,8;

(3,3) F_3= (7+1.4*3)+ (2.1+1,4*3)+10,5=28;

Переходимо до наступного етапу.

E_2: F_2= (7+1.4x_2)+ (2.1+1.4S_2)+ F_3(S_2);

S_2= S_1+x_2-P_2= S_1+x_2-1.

S_1	x_2				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0		35,7	37,1	38,5	39,9
1	34,3	35,7	37,1	38,5	
2	34,3	35,7	37,1		
3	34,3	35,7			

(0,1) F_2= (7+1,4)+ (2,1+0)+25,2=35,7;

(0,2) F_2= (7+1,4*2)+ (2,1+1,4)+23,8=37,1;

(0,3) F_2= (7+1,4*3)+ (2,1+1,4*2)+22,4=38,5;

(0,4) F_2= (7+1,4*4)+ (2,1+1,4*3)+21=39,9;

(1,0) F_2= (7+1,4*0)+ (2,1+0)+25,2=34,3;

(1,1) F_2= (7+1,4)+ (2,1+1,4)+23,8=35,7;
(1,2) F_2= (7+1,4*2)+ (2,1+1,4*2)+22,4=37,1;
(1,3) F_2= (7+1,4*3)+ (2,1+1,4*3)+21=38,5;
(2,0) F_2= (7+1,4*0)+ (2,1+1,4)+23,8=34,3;
(2,1) F_2= (7+1,4)+ (2,1+1,4*2)+22,4=35,7;
(2,2) F_2= (7+1,4*2)+ (2,1+1,4*3)+21=37,1;
(3,0) F_2= (7+1,4*0)+ (2,1+1,4*2)+22,4=34,3;
(3,1) F_2= (7+1,4)+ (2,1+1,4*3)+21=35,7;

S_1	x_2	$F_2(S_1)$
0	1	35,7
1	0	34,3
2	0	34,3
3	0	34,3

Розглянемо останній етап.

E_1: $\mathbf{F_1= (7+1.4x_1)+ (2.1+1.4S1)+ F_2(S_1)}$;

$S_1= S_0+x_1-P_1= S_0+x_1-3$.

S_2	x_3				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0				49	50,4
1			47,6	49	51,8
2		46,2	47,6	50,4	53,2
3	44,8	46,2	49	51,8	

S_0	x_1	$F_1(S_0)$
0	3	49
1	2	47,6
2	1	46,2
3	0	44,8

(0,3) F_1= (7+1,4*3)+ (2,1+0)+35,7=49;
(0,4) F_1= (7+1,4*4)+ (2,1+1,4)+34,3=50,4;
(1,2) F_1= (7+1,4*2)+ (2,1+0)+35,7=47,6;
(1,3) F_1= (7+1,4*3)+ (2,1+1,4)+34,3=49;
(1,4) F_1= (7+1,4*4)+ (2,1+1,4*2)+34,3=51,8;

(2,1) F_1= (7+1,4)+ (2,1+0)+35,7=46,2;
(2,2) F_1= (7+1,4*2)+ (2,1+1,4)+34,3=47,6;

(2,3) F_1= (7+1,4*3)+ (2,1+1,4*2)+34,3=50,4;
(2,4) F_1= (7+1,4*4)+ (2,1+1,4*3)+34,3=53,2;
(3,0) F_1= (7+1,4*0)+ (2,1+0)+35,7=44,8;
(3,1) F_1= (7+1,4)+ (2,1+1,4)+34,3=46,2;
(3,2) F_1= (7+1,4*2)+ (2,1+1,4*2)+34,3=49;
(3,3) F_1= (7+1,4*3)+ (2,1+1,4*3)+34,3=51,8;

Найоптимальнішим варіантом у даному випадку буде випуск кожного етапу кількості продукції, яка рівна попиту. Зберігання на складі у даному випадку не є доцільним.

Тому що $S_0=0$, з етапу Е1 випливає, що загальні витрати $F_1(S_0)=49$. Звідси ми задовольняємо попит P_1=3 і таким чином на складі залишається $S_1=0$. Ми приходимо на таблицю етапу Е2 для $S_1=0$. Ми повинні виробити на етапі Е2 x_2 =1, що задовольняє попит P_2=1, на складі ж знову не залишається запасу $S_2=0$. Переходимо до етапу Е3, для значення $S_2=0$. Ми повинні виробити x_3 =3 одиниць продукції , задовольнивши таким чином попит P_3=3. На складі запасу не залишиться, звідси $S_3=0$. Переходимо до етапу Е4. Для значення запасу $S_3=0$ маємо виробити x_4 =2 одиниць продукції. Таким чином ми задовольнимо попит P_4=2 і виконаємо умову $S_4=0$, що і вимагалось.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 1

Три зерносховища знаходяться в м. Миколаєві, Кіровограді та Херсоні, на яких зберігається 715, 800 та 560 т зерна відповідно. Вони мають поставити зерно в такі міста: Одесу – 500 т, Іллічівськ – 340 т, Львів – 620 т, Суми – 615 т.

Вартість перевезення 1 т зерна

Постачальник	Тарифи перевезення			
	Одеса	Іллічівськ	Львів	Суми
Миколаїв	80	95	130	120
Кіровоград	100	110	120	90
Херсон	100	105	145	115

Необхідно визначити план перевезення з мінімальною вартістю.

Дана транспортна задача може бути вирішена такими методами:

1. метод північно-західного кута;
2. метод найменших витрат для користувачів;
3. метод намірів та реалізацій;
4. метод потенціалів.

Також транспортна задача може бути вирішена за допомогою функції **«Поиск решений»** табличного процесора Excel. Для цього ми повинні зробити такі дії:

- Створюємо MS Excel таблицю тарифів та запасів: «Тарифи перевезень» та «План перевезень» (рис. 1). У таблиці «Тарифи перевезень» потрібно записати вихідні числові дані, а в таблиці План перевезень необхідно визначити комірки, в яких будуть записуватися шукані результати (B11:E14), продублювати стовпчики Запаси та Потреби, а також для зручності роботи з таблицею додати стовпчики Використано та Задоволено.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Таблиця тарифів та запасів**						
2	**Тарифи перевезення**						
3		Одеса	Іллічівськ	Львів	Суми	Запаси	
4	Миколаїв	80	95	130	120	715	
5	Кіровоград	100	110	120	90	800	
6	Херсон	100	105	145	115	560	
7	Потреби	500	340	620	615	Всього 2015 т	
8							
9	**План перевезень**						
10		Одеса	Іллічівськ	Львів	Суми	Використано	**Запаси**
11	Миколаїв						**715,0**
12	Кіровоград						**800,0**
13	Херсон						**560,0**
14	Задоволено						
15	**Потреби**	**500,0**	**340,0**	**620,0**	**615,0**		
16				*Цільова функція*			

Рис 1. Формування транспортної задачі у Excel.

- Задаємо формули для обчислення кількостей одиниць товару, які були перевезені від кожного окремого постачальника. Для визначення кількості перевезених товарів з м. Миколаєва в комірку F11 потрібно записати формулу =SUM(B11:E11). Аналогічно необхідно обчислити дані для міст Кіровоград та Херсон.
- Потрібно обчислити кількість одиниць товарів, які отримали окремі споживачі. Так для того, щоб обчислити кількість одиниць отриманого товару м. Одесою, в комірку B14 потрібно ввести формулу = SUM (B11:B13). Аналогічно необхідно обчислити дані для інших міст-споживачів.
- Потрібно задати цільову функцію. Під час її створення необхідно врахувати, що загальна вартість усіх перевезень, які необхідно виконати для того, щоб доставити товар усіх постачальників до кожного споживача, відповідає сумі добутків відповідних тарифів на перевезену кількість товару. Тому введемо цільову функцію загальної вартості перевезень до комірки F16 у такому вигляді:

  =B4*B11+C4*C11+D4*D11+B5*B12+C5*C12+D5*D12+B6*B13+C6*C13+D6*D13+E4*E11+E5*E12+E6*E13.

- Для того, щоб вказати необхідні посилання на комірки та обмеження для цільової функції, потрібно виконати команди *Сервис/Поиск решений.*
- У діалоговому вікні *Поиск решений* виконати такі дії:
  - ✓ у полі *Установить целевую ячейку* вказати $F$16;
  - ✓ для перемикача *Равной* вибрати значення *Min***;**
  - ✓ у полі *Изменяя ячейки* вказати діапазон *$B$11:$E$13*;
  - ✓ у полі *Ограничения* створити список всіх обмежень даної задачі, клацнувши по кнопці *Добавить:*

$B$11:$E$13>=0

$B$15:$E$15=$B$14:$E$14

$F$11:$F$13= $G$11:$G$13

- Клацнути на кнопку Выполнить.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Таблиця тарифів та запасів**						
2	**Тарифи перевезення**						
3		Одеса	Іллічівськ	Львів	Суми	Запаси	
4	Миколаїв	80	95	130	120	715	
5	Кіровоград	100	110	120	90	800	
6	Херсон	100	105	145	115	560	
7	Потреби	500	340	620	615	Всього 2015 т	
8							
9	**План перевезень**						
10		Одеса	Іллічівськ	Львів	Суми	Використано	**Запаси**
11	Миколаїв	500,0	0,0	215,0	0,0	*715,0*	**715,0**
12	Кіровоград	0,0	0,0	291,8	508,2	*800,0*	**800,0**
13	Херсон	0,0	340,0	113,2	106,8	*560,0*	**560,0**
14	Задоволено	*500,0*	*340,0*	*620,0*	*615,0*		
15	**Потреби**	**500,0**	**340,0**	**620,0**	**615,0**		
16				*Цільова функція*		**213100,0**	

Рис 2. Вирішення транспортної задачі за допомогою табличного процесора Excel.

Функція Поиск решений дозволяє створює три типів звіту: за результатами, за стійкістю, за граничними умовами.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист:
[Ситуация.xls]Лист1
Отчет создан: 01.04.2008
10:35:20

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$16	Цільова функція Використано	213100,0	213100,0

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$11	Миколаїв Одеса	500,0	500,0
$C$11	Миколаїв Іллічівськ	0,0	0,0
$D$11	Миколаїв Львів	215,0	215,0
$E$11	Миколаїв Суми	0,0	0,0
$B$12	Кіровоград Одеса	0,0	0,0
$C$12	Кіровоград Іллічівськ	0,0	0,0
$D$12	Кіровоград Львів	291,8	291,8
$E$12	Кіровоград Суми	508,2	508,2
$B$13	Херсон Одеса	0,0	0,0
$C$13	Херсон Іллічівськ	340,0	340,0
$D$13	Херсон Львів	113,2	113,2
$E$13	Херсон Суми	106,8	106,8

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула
$B$15	Потреби Одеса	500,0	$B$15=$B$14
$C$15	Потреби Іллічівськ	340,0	$C$15=$C$14
$D$15	Потреби Львів	620,0	$D$15=$D$14
$E$15	Потреби Суми	615,0	$E$15=$E$14
$G$11	Миколаїв Запаси	715,0	$G$11=$F$11
$G$12	Кіровоград Запаси	800,0	$G$12=$F$12
$G$13	Херсон Запаси	560,0	$G$13=$F$13
$B$11	Миколаїв Одеса	500,0	$B$11>=0

$C$11	Миколаїв Іллічівськ	0,0	$C$11>=0
$D$11	Миколаїв Львів	215,0	$D$11>=0
$E$11	Миколаїв Суми	0,0	$E$11>=0
$B$12	Кіровоград Одеса	0,0	$B$12>=0
$C$12	Кіровоград Іллічівськ	0,0	$C$12>=0
$D$12	Кіровоград Львів	291,8	$D$12>=0
$E$12	Кіровоград Суми	508,2	$E$12>=0
$B$13	Херсон Одеса	0,0	$B$13>=0
$C$13	Херсон Іллічівськ	340,0	$C$13>=0
$D$13	Херсон Львів	113,2	$D$13>=0
$E$13	Херсон Суми	106,8	$E$13>=0

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Ситуация.xls]Лист1
Отчет создан: 01.04.2008 10:35:20

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$11	Миколаїв Одеса	500,0	0,0
$C$11	Миколаїв Іллічівськ	0,0	5,0
$D$11	Миколаїв Львів	215,0	0,0
$E$11	Миколаїв Суми	0,0	20,0
$B$12	Кіровоград Одеса	0,0	30,0
$C$12	Кіровоград Іллічівськ	0,0	30,0
$D$12	Кіровоград Львів	291,8	0,0
$E$12	Кіровоград Суми	508,2	0,0
$B$13	Херсон Одеса	0,0	5,0
$C$13	Херсон Іллічівськ	340,0	0,0
$D$13	Херсон Львів	113,2	0,0
$E$13	Херсон Суми	106,8	0,0

Ограничения

		Результ.	Лагранжа

Ячейка	Имя	значение	Множитель
$B$15	Потреби Одеса	500,0	0,0
$C$15	Потреби Іллічівськ	340,0	-10,0
$D$15	Потреби Львів	620,0	-50,0
$E$15	Потреби Суми	615,0	-20,0
$G$11	Миколаїв Запаси	715,0	-80,0
$G$12	Кіровоград Запаси	800,0	-70,0
$G$13	Херсон Запаси	560,0	-95,0

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Ситуация.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 01.04.2008 10:35:21

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
$F$16	Цільова функція Використано	213100,0

Изменяемое			Целевой
Ячейка	Имя	Значение	результат
$B$11	Миколаїв Одеса	500,0	213100,0
$C$11	Миколаїв Іллічівськ	0,0	213100,0
$D$11	Миколаїв Львів	215,0	213100,0
$E$11	Миколаїв Суми	0,0	213100,0
$B$12	Кіровоград Одеса	0,0	213100,0
$C$12	Кіровоград Іллічівськ	0,0	213100,0
$D$12	Кіровоград Львів	291,8	213100,0
$E$12	Кіровоград Суми	508,2	213100,0
$B$13	Херсон Одеса	0,0	213100,0
$C$13	Херсон Іллічівськ	340,0	213100,0
$D$13	Херсон Львів	113,2	213100,0
$E$13	Херсон Суми	106,8	213100,0

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 2

Сільськогосподарська фірма «Агро-Ніка» має три склади (I,II,III), на яких зберігається 1,2 т; 1,8 т; 2,2 т томатів відповідно. Дане підприємство отримало замовлення від трьох фірм на поставку томатів:

1. «Соки і нектари» - 1,4 т;
2. «Дари природи» - 2,1 т;
3. «Врожай+» - 1,7 т.

Вартість перевезення 1т. томатів із кожного пункту постачання у відповідний пункт споживання наведена нижче.

Вартість перевезення 1 т томатів

Постачальник	Тарифи перевезення		
	«Соки і нектари»	«Дари природи»	«Врожай+»
I	120	105	190
II	90	160	80
III	120	90	95

Необхідно визначити план перевезення з мінімальною вартістю.

Дана транспортна задача може бути вирішена такими методами:

1. метод північно-західного кута;
2. метод найменших витрат для користувачів;
3. метод намірів та реалізацій;
4. метод потенціалів.

Також дана транспортна задача може бути вирішена за допомогою функції **«Поиск решений»** табличного процесора Excel. Вирішення задачі в табличному процесорі зображено на рис 1.

	A	B	C	D	E	F
1	**Таблиця тарифів та запасів**					
2	**Тарифи перевезення**					
3		"Соки і нектари"	"Дари природи"	"Врожай+"	Запаси	
4	I	120	105	190	1,2	
5	II	90	160	80	1,8	
6	III	120	90	95	2,2	
7	Потреби	1,4	2,1	1,7	Всього 5,2	
8						
9	**План перевезень**					
10		"Соки і нектари"	"Дари природи"	"Врожай+"	*Використано*	**Запаси**
11	I	0,1	1,1	0,0	*1,2*	**1,2**
12	II	1,3	0,0	0,5	*1,8*	**1,8**
13	III	0,0	1,0	1,2	*2,2*	**2,2**
14	*Задоволено*	*1,4*	*2,1*	*1,7*		
15	**Потреби**	**1,4**	**2,1**	**1,7**		
16				*Цільова функція*	**488,5**	

Рис 1. Вирішення транспортної задачі за допомогою табличного процесора Excel.

Після проведення розрахунків було сплановане навантаження на три склади підприємства «Агро-Ніка».

- I склад постачає 0,1 т томатів фірмі «Соки і нектари» та 1,1 т фірмі «Дари природи».
- II склад постачає 1,3 т фірмі «Соки і нектари» та 0,5 т фірмі «Врожай+».
- III склад постачає 1 т томатів фірмі «Дари природи» та 1,2 т фірмі «Врожай+».
- При цьому мінімальні витрати на перевезення складають 488,5 гр. од.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 3

Представники керівництва ВАТ «Erste» вирішили на зборах 21.04.2008 р. розрахувати план видачі кредитів корпоративного та індивідуального банкінгу для своїх робітників на травень місяць. Але у цей період виникла криза дефіциту кредитних ресурсів. Для зменшення власних затрат на видачу кредитів, слід розрахувати оптимальну кількість коштів, що можна видати. У розпорядженні керівництва є данні про функцію вартості виданих кредитів корпоративним клієнтам (X_1, грн.) та клієнтам індивідуального банкінгу (X_2, грн.), яка характеризується, як:

$$\mathbf{(400000*X_1-200000)^2+(X_2-600000)^2;}$$

Але видача коштів для корпоративних клієнтів та клієнтів індивідуального бізнесу є обмеженою через нестачу кредитних ресурсів, і не має перевищити 4 млн. грн. раніше банк працював з потужністю видавання кредитних коштів, як мінімум на суму 4 млн. грн. Тому банк не зацікавлений у зменшенні цього числа. Тобто планово на травень 2008 року банк має видати 4 млн. грн.

Завдання: визначити кількість кредитних коштів, які необхідно видати для найменших затрат банку на оформлення і видачу кредитів за умови дефіцитної кризи.

1. Сформулюємо математичну модель даної задачі:

$$F=(400000*X_1-200000)^2+(X_2-600000)^2 \rightarrow \min;$$

$$X_1+X_2=4000000$$

2. Задача складання плану видач з метою мінімізації витрат належить до класу задач нелінійного програмування і може бути вирішена методом коефіцієнтів Лагранжа. Для цього побудуємо функцію:

$$L(\lambda,x_1,x_2)= (400000*x_1-200000)^2+$$
$$+(X_2-600000)^2 + \lambda\ (4000000-x1-x2)$$

Та систему рівнянь:

$$800000(400000x_1-200000)- \lambda=0$$
$$2(X_2-600000)- \lambda=0$$
$$4000000- x1-x2=0$$

3. Вирішуємо систему за допомогою Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 320000000 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 160000000000 \\ 1200000 \\ -4000000 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 500.021 \\ 3.999 \times 10^{6} \\ 6.799 \times 10^{6} \end{pmatrix}$$

4. Досліджуємо на безумовний екстремум і визначаємо оптимальний обсяг необхідних кредитних коштів:

$$F_{(опт.)} = (3{,}999*10^{16}+1{,}155*10^{13})$$

В результаті проведення розрахунків було сплановано кількість виданих кредитів на травень 2008 р.: кредити для юридичних осіб на суму 500 грн., для індивідуальних клієнтів на суму 3999000 грн. Задача була вирішена методом Лагранжа за допомогою функції «fsolve» у Mathcad.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 4

Щомісячний дохід споживача у 1000 грн. розподіляється між чотирма товарами: м’ясом, молоком, хлібом та картоплею. Припустимо, що м’ясо коштує 40 грн., а картопля – 5 грн. за кг., молоко 4 грн. за л. і хліб 2 грн. Але для підтримання здоров’я на нормальному рівні споживач має з’їдати не менше 8 кг. м’яса на місяць та витрати хоча б 15 л. молока і не більше 15 хлібин. Якщо функція корисності для споживача має вигляд $u(x) = 4м'яс + 2{,}5мол. + 2хл. + 1карт.$, яка споживча корзина максимізуватиме його корисність?

Математична модель задачі:

x_1 – кількість м’яса у споживчому кошику; x_2 – молока, x_3 – хліба; x_4 – картоплі.

Цільова функція:

$$F(x) = 4x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$$

Обмеження:

$$\begin{cases} 40x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 1000; \\ x_1 \ge 8; \\ x_2 \ge 15; \\ x_3 \le 15; \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Можливі методи розв’язку:

1. Графоаналітичний метод;
2. Симплекс-метод.

Використаємо функцію Solver у MS Excel для пошуку оптимального рішення. Для цього спочатку формуємо макет таблиці (відповідні рядки та стовпчики).

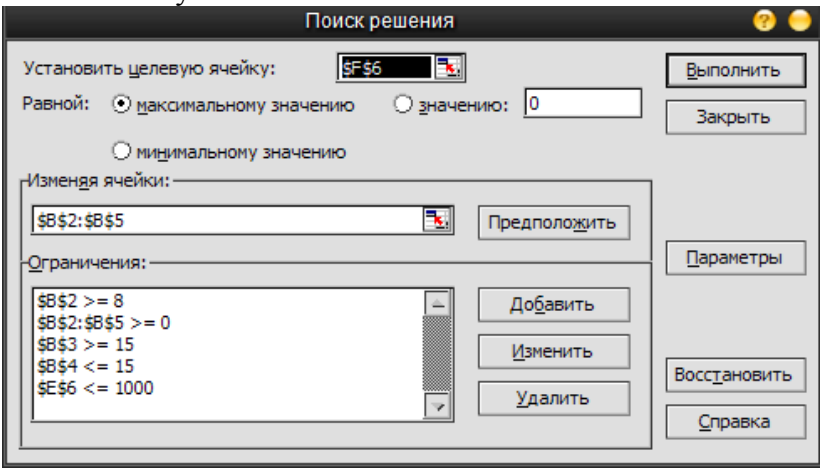
Колонка 2 для всіх продуктів спочатку заповнюється 0. Колонки 3 і 4 – значення з умови задачі. Колонка 5 заповнюється формулами добутку елементів колонки 2 та колонки 3 ($K2 \times K3$)

для кожного рядка окремо. $Колонка_6 = К2 \times К4$. Результуючий показник – сума по колонці 5 та по колонці 6.

Розв’язок задачі про максимізацію корисності

	Кіль-кість	Варті-сть за од.	Кор-ть від спожи-вання 1. тов.	Загальна вартість	Сукупна корисність
1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
м'ясо	8	40	4	320	32
молоко	163	4	2,5	650	406
хліб	15	2	2	30	30
картопля	0	5	1	0	0
				1000	468

Після того ,як таблицю сформовано і формули задано, відкриваємо „Сервіс → Пошук рішення”. Для комірки з сукупною корисністю визначаємо параметри оптимізації (максимальному значенню) та вводимо всі обмеження і комірки, що змінюватимуться:



В результаті виконання розрахунків функція видає такий результат (таблиця 1):

Сформуємо три види звітів за допомогою Solver (Пошук рішення). Ці звіти дають розширену інформацію про виконані дії.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга2]Лист1
Отчет создан: 03.04.2008 5:55:25

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$6	Сукупна корисність	0	468,25

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	м'ясо кількість	0	8
$B$3	молоко кількість	0	162,5
$B$4	хліб кількість	0	15
$B$5	картоп кількість	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула
$E$6	Загальна вартість	1000	$E$6<=1000
$B$2	м'ясо кількість	8	$B$2>=8
$B$3	молоко кількість	162,5	$B$3>=15
$B$4	хліб кількість	15	$B$4<=15
$B$2	м'ясо кількість	8	$B$2>=0
$B$3	молоко кількість	162,5	$B$3>=0
$B$4	хліб кількість	15	$B$4>=0
$B$5	картоп кількість	0	$B$5>=0

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга2]Лист1
Отчет создан: 03.04.2008 5:55:25

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$2	м'ясо кількість	8	-21
$B$3	молоко кількість	162,5	0
$B$4	хліб кількість	15	0,75
$B$5	картоп кількість	0	-2,12500006

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
$E$6	Загальна вартість	1000	0,625

Microsoft Excel 10.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Книга2]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 03.04.2008 5:55:25

Целевое				
Ячейка	Имя	Значение		
$F$6	Сукупна корисність	468,25		
Изменяемое			Нижний предел	Целевой результат
Ячейка	Имя	Значение		
$B$2	м'ясо кількість	8	8	468,25
$B$3	молоко кількість	162,5	15	99,5
$B$4	хліб кількість	15	0	438,25
$B$5	картоп кількість	0	0	468,25

Максимальну корисність за умов виконання всіх обмежень споживач отримуватиме, коли в його місячному споживчому кошику буде 8 кг. м’яса, 163 л. молока, 14 хлібин. Від споживання картоплі слід відмовитись.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 5

Організація роботи служби доставки продовольчого супермаркету (лінійне цілочисельне бінарне програмування).

Продовольчий супермаркет «Гурман» нещодавно запропонував своїм оптовим клієнтам послугу дистанційного здійснення покупок. Замовлення здійснюються по телефону і виконуються службою доставки протягом наступного дня до 18 години.

Вчора було прийнято 16 замовлень. Транспортний засіб (для таких доставок було придбано невеликий автомобіль типу «мінівен» з холодильною камерою) має загалом доставити 426 кг продуктів (вагу продуктів по кожному замовленню див. у табл..1) при умові, що його вантажомісткість складає 300 кг. Як організувати доставку, якщо вона може бути здійснена тільки по 12 замовленнях?

№	Замовлення							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Вага, кг	18	26	64	18	53	29	46	30

№	Замовлення							
	9	10	11	12	13	14	15	16
Вага, кг	28	14	48	52	51	68	46	50

Поставимо задачу розвантаження транспортного засобу: задано $N = 16$ точок призначення. Замовлення задаються вектором

$$R = \{18,26,64,18,53,29,46,30,28,14,48,52,51,68,46,50\},$$

Цільова функція доставки товару по точкам призначення має вигляд

$$\min\left(P_T - \sum_{i=1}^{n} R_i\right) \geq 0,$$

де P_T - вантажомісткість транспортного засобу, R_i - замовлення кожної точки призначення.

Розрахувати: замовлення в які точки призначення транспортний засіб може виконати доставку, тобто знайти $X_i = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_9, X_{10}\}$, причому $X_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$.

Обмеження:

1. Вантажомісткість транспортного засобу $P_T = 300кг$ т.
2. Транспортний засіб може заїхати не більше ніж в $n = 12$ точок призначення.

Математична модель поставленої задачі записується наступним чином:

Цільова функція:

$$F = -18X_1 - 26X_2 - 64X_3 - 18X_4 -$$
$$-53X_5 - \ldots - 46X_{15} - 50X_{16} \to \min$$

Значення коефіцієнтів C_i задаємо від'ємними, тому що функція мінімізується.

Обмеження:

$$\begin{cases} 18X_1 + 26X_2 + 64X_3 + 18X_4 + \ldots + 46X_{15} + 50X_{16} \le 300; \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots + X_{15} + X_{16} \le 12. \end{cases}$$

Цю задачу можна розв'язати за допомогою застосування методів рішення задач цілочисельного програмування: методом Гоморі та комбінаторними методами (гілок та меж, адитивний з бінарними змінними).

Розв'яжемо задачу через застосування програмного забезпечення MathLab 7.1.

```
>> f=[-18;-26;-64;-18;-53;-29;-46;-30;-28;-14;-48;-52;-51;-68;-46;-50]
f =
 -18
 -26
 -64
 -18
 -53
 -29
```

```
 -46
 -30
 -28
 -14
 -48
 -52
 -51
 -68
 -46
 -50
>> x=bintprog(f)
Optimization terminated.
x =
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
>> [x,fval,exit,output]=bintprog(f)
Optimization terminated.
x =
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
```

```
     1
     1
     1
     1
     1
     1
    fval =
     -641
    exit =
     1


    output =
     iterations: 0
     nodes: 1
     time: 0.1719
     algorithm: 'LP-based branch-and-bound'
     branchStrategy: 'maximum integer infeasibility'
     nodeSrchStrategy: 'best node search'
     message: 'Optimization terminated.'
    >> a=[18 26 64 18 53 29 46 30 28 14 48 52 51 68 46 50;1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1]
    a =
     Columns 1 through 11
     18 26 64 18 53 29 46 30 28 14 48
     1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
     Columns 12 through 16
     52 51 68 46 50
     1 1 1 1 1
    >> b=[300;12]
    b =
     300
     12
    >> x=bintprog(f,a,b)
    Optimization terminated.
    x =
     1
     0
     1
     1
     1
     1
```

```
 1
 1
 1
 1
 0
 0
 0
 0
 0
 0
>> [x,fval,exit,output]=bintprog(f,a,b)
Optimization terminated.
x =
 1
 0
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 0
 0
 0
 0
 0
 0
fval =
 -300
exit =
 1
output =
 iterations: 20
 nodes: 9
 time: 0.2031
 algorithm: 'LP-based branch-and-bound'
 branchStrategy: 'maximum integer infeasibility'
 nodeSrchStrategy: 'best node search'
 message: 'Optimization terminated.'
```

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 6

Прейскурант на товари в столові МДГУ ім. П.Могили та умовні коефіцієнти „корисності” та „насичення” (для студента-хлопчика) подано в таблиці:

Найменування товару	**Умовне позначення**	**Ціна за од., грн.**	**Коефіцієнт корисності**	**Коефіцієнт насичення**
борщ	x1	1,2	0,8	0,5
суп	x2	0,9	0,8	0,5
гречана каша	x3	0,75	0,7	0,4
пюре	x4	1,25	0,4	0,4
котлета	x5	1,5	0,5	0,25
бризоль	x6	2,4	0,55	0,3
буряк	x7	0,75	0,8	0,1
салат з. капусти	x8	1,1	0,8	0,1
салат „Олів’є”	x9	3,2	0,3	0,15
чай	x10	0,5	0,03	0,01
кава	x11	1	0,03	0,01
маківка	x12	0,8	0,05	0,1
кекс	x13	0,85	0,05	0,1
котлета в тісті	x14	2	0,2	0,3
піца	x15	2,5	0,1	0,2

Визначте, які з перелічених товарів купуватиме студент, за умови, що ціна обіду не перевищує 5,5 грн., а кожен з товарів можна купити лише в одній порції, при цьому студент має максимізувати отримувану від споживання їжі корисність та втамувати голод, але не переїсти, й обов’язково купити чай або каву.

Математична модель

<u>Цільова функція:</u>

$$F(x) = 0.8x_1 + 0.8x_2 + 0.7x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 + 0.55x_6$$
$$+ 0.8x_7 + 0.8x_8 + 0.3x_9 + 0.03x_{10} +$$

$$+0.03x_{11}+0.05x_{12}+0.05x_{13}+0.2x_{14}+0.1x_{15}\to\max$$

<u>Обмеження:</u>

$$\begin{cases}0.5x_1+0.5x_2+0.4x_3+0.4x_4+0.25x_5+0.3x_6+0.1x_7+0.1x_8+\\+0.15x_9+0.01x_{10}+0.01x_{11}+0.1x_{12}+0.1x_{13}+0.3x_{14}+0.2x_{15}\le 1;\\1.2x_1+0.9x_2+0.75x_3+1.25x_4+1.5x_5+2.4x_6+0.75x_7+1.1x_8+\\+3.2x_9+0.5x_{10}+x_{11}+0.8x_{12}+0.85x_{13}+2x_{14}+2.5x_{15}\le 5.5;\\x_{10}+x_{11}=1;\\0\le x_i\le 1, i=\overline{1,15}\end{cases}$$

Це задача цілочисельного програмування. Її можна розв’язати методом Гоморі (відсікаючих площин), методом гілок та меж.

Функцію подаємо як F’(x) = F(x)*(-1) (бо Matlab виконує алгоритм мінімізації).

$$F(x)=0.8x_1-0.8x_{2-}-0.7x_3-0.4x_4-0.5x_5-$$
$$-0.55x_6-0.8x_7-0.8x_8-0.3x_9-0.03x_{10}-$$
$$-0.03x_{11}-0.05x_{12}-0.05x_{13}-0.2x_{14}-0.1x_{15}\to\min$$

```
>> f=[-0.8 -0.8 -0.7 -0.4 -0.5 -0.55 -0.8 -0.8 -0.3 -0.03 -0.03 -0.05 -0.05 -0.2 -0.1]

f =

  Columns 1 through 8

   -0.8000   -0.8000   -0.7000   -0.4000   -0.5000   -0.5500   -0.8000   -0.8000

  Columns 9 through 15

   -0.3000   -0.0300   -0.0300   -0.0500   -0.0500   -0.2000   -0.1000
```

```
>> aeq=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0]

aeq =

     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     1     0     0     0     0

>> beq=[1]

beq =

     1
```

```
a =

  Columns 1 through 8

    1.2000    0.9000    0.7500    1.2500    1.5000    2.4000    0.7500    1.1000
    0.5000    0.5000    0.4000    0.4000    0.2500    0.3000    0.1000    0.1000

  Columns 9 through 15

    3.2000    0.5000    1.0000    0.8000    0.8500    2.0000    2.5000
    0.1500    0.0100    0.0100    0.1000    0.1000    0.3000    0.2000

>> b=[5.5;1]

b =

    5.5000
    1.0000
```

```
>> x=bintprog(f,a,b,aeq,beq)
Optimization terminated.

x =

     0
     1
     0
     0
     1
     0
     1
     1
     0
     1
     0
     0
     0
     0
     0
```

$$x_2 = 1; x_5 = 1; x_7 = 1; x_8 = 1; x_{10} = 1.$$

Тобто для максимізації корисності й за умови виконання всіх обмежень оптимальним для студента буде рішення купити 1 порцію супу, 1 котлету, по одній порції буряка та салату зі свіжої капусти і склянку чаю. Вартість такого обіду складатиме 4,75 грн. (студент економить 75 копійок), студент втамує голод на 96%, а рівень корисності становитиме 2,93.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 7

Задача цілочисельного лінійного програмування.
Задача про рюкзак.

Мандрівник, що збирається в похід, повинен визначити набір предметів, які він візьме з собою. Кожен з предметів *i* характеризується вагою (v_i) та цінністю (c_i). Якщо мандрівник бере з собою предмет, то *xi* = 1, якщо ні, то x_i = 0. Кількість предметів, що можуть бути взяті, обмежуються місткістю рюкзака *V*.

Загальна постановка задачі цілочисельного програмування має вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} X_i \le b_i,$$

$$X_i = \{0,1\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$

В нашому випадку

$$F = \sum c_i * x_i \to max$$
$$\sum v_i * x_i \le V$$
$$x_i = \{0,1\}$$

Маємо такі вихідні умови для вирішення задачі.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	2	4	1	3	3,5	2,5	6	2	3	4,5
v	0,6	1	0,3	0,4	0,8	1,5	0,5	1	0,3	0,9

При цьому *V*= *5*.

Для початку сформуємо математичну модель.

$$F = 2*x1+4*x2+x3+3*x4+3,5*x5+2,5*x6+6*x7+$$
$$+2*x8+3*x9+4,5*x10 \to max$$
$$0,6*x1+x2+0,3*x3+0,4*x4+0,8*x5+1,5*x6+$$
$$+0,5*x7+x8+0,3*x9+0,9*x10 \le 5$$
$$x=\{0,1\}$$

Задачу цілочисельного лінійного програмування можна розв'язати такими способами вручну:

- методом відтинань
- комбінаторними методами
- евристичними методами.

Дану задачу можна вирішити, використовуючи програмне забезпечення, а саме програму MathLab.

Задачі цілочисельного програмування в MathLab вирішуються за допомогою функції *bintprog*.

```
>> f=[-2;-4;-1;-3;-3.5;-2.5;-6;-2;-3;-4.5]
f =
 -2.0000
 -4.0000
 -1.0000
 -3.0000
 -3.5000
 -2.5000
 -6.0000
 -2.0000
 -3.0000
 -4.5000
>> a=[0.6 1 0.3 0.4 0.8 1.5 0.5 1 0.3 0.9]
a =
 Columns 1 through 5
 0.6000 1.0000 0.3000 0.4000 0.8000
 Columns 6 through 10
 1.5000 0.5000 1.0000 0.3000 0.9000
>> b=[5]
b =
 5
>> x=bintprog(f,a,b)
Optimization terminated.
x =
 1
 1
 1
 1
 1
 0
 1
 0
 1
 1
```

```
>> [x,fval,exitflag,output]=bintprog(f,a,b)
Optimization terminated.
x =
 1
 1
 1
 1
 1
 0
 1
 0
 1
 1
fval =
 -27
exitflag =
 1
output =
 iterations: 24
 nodes: 5
 time: 0.2504
 algorithm: 'LP-based branch-and-bound'
 branchStrategy: 'maximum integer infeasibility'
 nodeSrchStrategy: 'best node search'
 message: 'Optimization terminated.'
```

Використовуючи програмне забезпечення MathLab, ми вирішили задачі лінійного цілочисельного програмування. Програма визначила оптимальний набір речей, які має взяти мандрівник, а також розрахувала значення цільової функції. Мандрівник для максимізації цінності вмісту рюкзака має взяти всі можливі речі, окрім шостої та восьмої.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 8

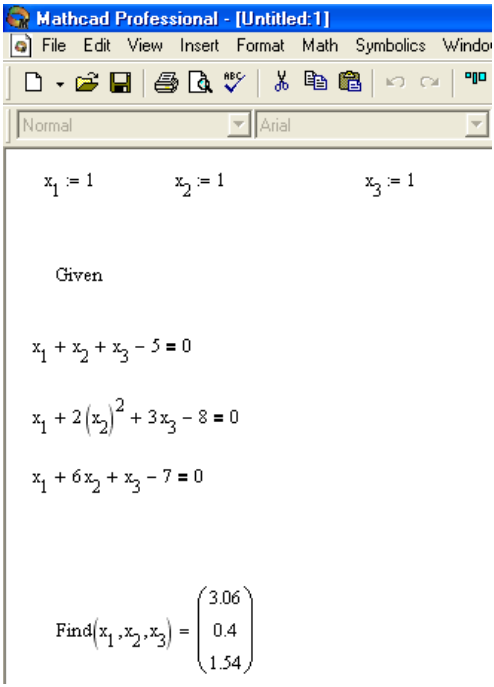
Підприємству потрібно виготовити певну кількість деталей. Деталі можна виготовити з трьох різних видів матеріалу. Витрати на ці матеріали потрібно задати такими рівняннями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2(x_2)^2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 = 7$$

Потрібно обрати такий вид матеріалу, витрати на який складатимуть якнайменше. Розв’язок за допомогою середовища Mathcad 2001.



Для виготовлення деталей з першого матеріалу витрати складатимуть 306 грн., другим – 40 грн. і третім – 154 грн. З цього розв’язку можна зробити висновки, що найбільш дешевим є виготовлення деталей з другого матеріалу.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 9

Підприємство «Вкусняшка» виготовляє і продає цукерки двох видів: «Фантазія» та «Смак». Для виробництва цукерок використовується два вихідних продукти: шоколад та згущене молоко. Витрати продуктів шоколад та згущене молоко на 1 кг відповідних цукерок і запаси цих продуктів на складі приведені в таблиці:

Продукт	Витрати продуктів, кг		Запаси продуктів на складі, кг
	«Фантазія»	«Смак»	
Шоколад	10	20	30
Згущене молоко	30	10	30

Ціна продажу за 1кг цукерок «Фантазія» складає 20 гривень, «Смак» продається по 10 гривень.

Потрібно визначити яку кількість цукерок кожного виду потрібно виробляти підприємству, щоб одержати максимальний доход.

Розв’язати цю задачу можна за допомогою графічного метода, симплекс методом, в Excel через «Поиск решения».

Позначимо:

- x_1 - кількість вироблених цукерок «Фантазія»;
- x_2 - кількість вироблених цукерок «Смак»;

<u>Обмеження</u>, яким повинні задовольняти перемінні задачі:

- x_1 , $x_2 \geq 0$;
- по витратам шоколаду: $10x_1 + 20x_2 \leq 30$;
- по витратам згущеного молока: $30x_1 + 10x_2 \leq 30$;

<u>Цільова функція задачі.</u>

Позначимо через *y* доход від продажу цукерок (грн.), тоді цільова функція задачі записується так:

$$y = 20x_1 + 10x_2 ,$$

таким чином, завдання полягає в тому, щоб максимізувати функцію при обмеженнях:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 30;$$
$$30x_1 + 10x_2 \leq 30;$$
$$x_1 , x_2 \geq 0;$$

Задача реалізована у середовищі MathCad

$f(x1, x2) := 20 \cdot x1 + 10 \cdot x2$

$x1 := 0$

$x2 := 0$

$P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

given

$10 \cdot x1 + 20 \cdot x2 \le 30$

$30 \cdot x1 + 10 \cdot x2 \le 30$

$P := \text{maximize}(f, x1, x2)$

$P = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.2 \end{pmatrix}$

$f(P_0, P_1) = 24$

Таким чином, доход буде максимальним (24 грн. за кг) при умові виробництва 0,6 кг цукерок «Фантазія» та 1,2 кг цукерок «Смак».

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 10

Нове рекламне агентство отримало контракт на рекламу нового продукту. Агентство може провести рекламну акцію на радіо та телебаченні. Рекламне агентство має 10 агентів. В приведеній нижче таблиці дані про кількість людей, які можуть бути охоплені тим або іншим видом реклами, вартість цієї реклами і кількість необхідних рекламних агентів. Рекламне агентство може виділити на цей проект бюджет, що не перевищує 100 тис. грн. Контракт забороняє використовувати більше 10 хв. на рекламу на радіо та телебаченні.

	Радіо	**Телебачення**
Вартість (тис.грн.)	8	24
Кількість рекламних агентів	1	2

Скільки хвилин повинна тривати реклама на радіо та телебаченні, щоб бюджет рекламної кампанії був мінімальний.

За допомогою MatLab отримуємо оптимальний розв’язок даної задачі:

```
>> f=[-8;-24]

f =

    -8
   -24

>> A=[1 2
1 1]

A =

     1     2
     1     1
```

```
>> b=[10;10]

b =

    10
    10

>> lb=zeros(2,1)

lb =

     0
     0
```

```
>> [x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,A,b,[],[],lb)
Optimization terminated.

x =

    0.0000
    5.0000


fval =

 -120.0000


exitflag =

     1


output =

      iterations: 5
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

```
lambda =

    ineqlin: [2x1 double]
      eqlin: [0x1 double]
      upper: [2x1 double]
      lower: [2x1 double]

>> lambda.ineqlin
```

```
ans =

   12.0000
    0.0000

>> lambda.lower

ans =

    4.0000
    0.0000
```

Функція мінімізується при x_2 = 5, і її значення рівне -120. Результат лежить на границі першого рівняння обмеження і множник Лагранжа для нього дорівнює 12, та на нижній границі першого рівняння обмеження і множник Лагранжа для нього дорівнює 4.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 11

Розглянемо задачу ЛП у стандартній формі: отримати максимальний виторг від виробництва Товару 1 і Товару 2.

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Чоловіча барсетка	Жіноча сумка
Шкіра Підкладка Гроші	200 м 300 м 2000 грн.	1,2 м 1,5м 20грн.	1,5 м 1,8 м 30 грн.
Кількість виробів, шт.		x_1	x_2
Прибуток за 1 виріб, грн.		60 грн.	70 грн.

Знайти:

1. за якої кількості виготовлення сумок та барсеток прибуток буде максимальним;
2. мінімальний загальний випуск складає 30 одиниць;
3. прибуток має бути більше 4000 грн.

Цільова функція:
f(x1,x2)=60x1+70x2 → max
обмеження:

1,2x1+1.5x2<=200
1,5x1+1,8 x2<=300
20x1+30x2<=2000
x1+x2>=30
60x1+70x2>=4000
x1>=0 x2>=0 – ознаки додатності

Використаємо MathCad для розв’язання задач лінійного програмування:

$f(x1,x2) := 60x1 + 70x2$

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad P := \Big($

Given

$1.2x1 + 1.5x2 \le 200$

$1.5x1 + 1.8x2 \le 300$

$20x1 + 30x2 \le 2000$

$x1 + x2 \ge 30$

$60x1 + 70x2 \ge 4000$

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$

$P := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2)$

$$P = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(P_0, P_1) = 6 \times 10^3$$

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 12

Корпорація ИБФ «БЕТОНСИЛАСТРОЙ» займається виробництвом бетону та з/б конструкцій. В неї входить чотири заводи: два з них виробляють бетон, а інші два - з/б конструкції, всі вони розподілені по різним регіонам. Перед керівництвом корпорації стоїть задача задовольнити попит будівельних компаній на їх продукцію та отримати максимальний прибуток.

Витрати заводів що виробляють бетон, можна показати так:

P1(x1)=550 + 12x1+2x1^2 P2(x2)=1000 + 5x2+14x2^2

А заводів що виробляють з/б конструкції:

P3(x3)=250 + 2x3+10x3^2 P4(x4)=160 + 7x4+4x4^2

X1,X2,X3,X4 – витрати заводів на сировину

Загальна середня кількість споживання в регіонах бетону 1000, а з/б конструкцій 700.

Звідси x1+x2=1000, x3+x4=700.

Вирішуємо задачу в середовищі MatCad:

$X_1 := 1 \qquad X_2 := 1 \qquad X_3 := 1 \qquad X_4 := 1$

Given

$$12 X_1 + 2 (X_1)^2 = 550$$

$$5 X_2 + 14 (X_2)^2 = 1000$$

$$2 X_3 + 10 (X_3)^2 = 250$$

$$7 X_4 + 4 (X_4)^2 = 160$$

$$\text{Find}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \begin{pmatrix} 13.852 \\ 8.275 \\ 4.901 \\ 5.51 \end{pmatrix}$$

Витрати заводів будуть такими: перший завод X1=13,852; другий завод X2=8,275; третій завод X3=4,901; четвертий завод X4=5,51.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 13

ВАТ «Вімм-Біль-Дан» контролює три заводи А1, А2, А3, А4 здатні виготовляти 150, 375, 180, 150 тис. од. молочної продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма магазинами В1, В2, В3, В4, яким потрібно щотижня відповідно 150, 225, 180, 300 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 855 тис. од. продукції магазинам з кожного заводу наведені в таблиці:

	Тарифи перевезення				
	Споживач				
Постачальники	**В1**	**В2**	**В3**	**В4**	**Запаси**
А1	30	75	25	55	150
А2	88	60	30	60	375
А3	30	85	30	75	180
А4	35	30	60	100	150
Потреби	150	225	180	300	855

Визначити для кожного заводу оптимальний план перевезень продукції до магазинів, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Дана транспортна задача буде вирішуватись такими методами:

- метод найменших втрат для споживачів;
- метод північно-західного кута;
- метод намірів та реалізацій;
- використанням функції «Поиск решения» у табличному процесорі MS Excel.

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Використовуючи засоби табличного процесора MS Excel 2000, розв'язати транспортну задачу, яка задається так: існує чотири пункти постачання товару (заводи: *А1, А2, А3, А4)* та чотири пункти споживання - магазини (назвемо їх *В1, В2, В3, В4).* Для кожного пункту постачання відомий запас товару на складі *(Запаси),* а для кожного пункту споживання вказано обсяг їх потреб *(Потреби).* Також відома вартість перевезення одиниці товару (тариф

перевезення) із кожного пункту постачання у відповідний пункт споживання. Всі дані наведені у таблиці 1. Потрібно визначити план перевезення товару з мінімальною вартістю.

3. Створіть MS Excel таблиці **Тарифи та запаси** та **План перевезень** (рис. 1). У таблиці ***Тарифи та запаси*** потрібно записати вихідні числові дані, а в таблиці **План перевезень** необхідно визначити комірки, в яких будуть записуватися шукані результати **(B13:E16),** продублювати стовпчики ***Запаси*** та ***Потреби,*** а також для зручності роботи з таблицею додати стовпчики ***Використано*** та ***Задоволено.***

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Постач**	**Тарифи перевезення**					
2	**альник**	**Споживач**					
3	**и**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
4	A1	45	75	30	45	150	
5	A2	90	60	45	60	375	
6	A3	30	90	30	75	180	
7	A4	22,5	30	60	90	150	
8	**Потреб и**	150	225	180	300	855	
9							
10			План перевезень				
11	постачальники		тарифи перевезення				
12		B1	B2	B3	B4	використа	запаси
13	A1						150
14	A2						375
15	A3						180
16	A4						150
17	задоволено						
18	потреби	150	225	180	300		
19				**ЦІЛЬОВА**	**ФУНКЦІЯ**		
20							

Рис.1. Таблиці тарифів та запасів і плану перевезень

3. Далі необхідно задати формули для обчислення кількостей одиниць товару, які були перевезені від кожного окремого постачальника. Для визначення кількості перевезених товарів фірми **A1** в комірку **F13** потрібно записати формулу **=SUM(B13:E13).** Аналогічно необхідно обчислити дані для заводів A2, A3, A4.
4. Потрібно обчислити кількість одиниць товарів, які отримали окремі споживачі. Так для того, щоб обчислити

кількість одиниць отриманого товару ***B1***, в комірку **B17** потрібно ввести формулу **= SUM (B13:B16).** Аналогічно необхідно обчислити дані для інших магазинів.

5. Потрібно задати цільову функцію. Під час її створення необхідно врахувати, що загальна вартість усіх перевезень, які необхідно виконати для того, щоб доставити товар усіх заводів до кожного магазина, відповідає сумі добутків відповідних тарифів на перевезену кількість товару. Тому введемо цільову функцію загальної вартості перевезень до комірки F19 у такому вигляді:

   =B13*B4+C13*C4+D13*D4+E13*E4+B14*B5+C14*C5+D14*D5+E14*E5+B15*B6+C15*C6+D15*D6+E15*E6 (або функція **SUMPRODUCT).**

6. Для того, щоб вказати необхідні посилання на комірки та обмеження для цільової функції, потрібно виконати команди **Tools/Solver.**
7. У діалоговому вікні **Solver Parameters** виконати такі дії:
   - ✓ у полі **Set Target Cell** вказати $F$19;
   - ✓ для перемикача **Equal To** вибрати значення **Min;**
   - ✓ у полі **By Changing Cells** вказати діапазон B13:E16;
   - ✓ у полі **Subject to the Constraints** створити список всіх обмежень даної задачі, клацнувши по кнопці **Add;**
   - ✓ у діалоговому вікні **Add Constraint** ввести обмеження, заданими в таблиці нижче;

Тип обмеження	**Поле обмеження**	**Пояснення**	**Поле посилань на комірку**
>=	**0**	Умова невід'ємності кількості продукції, яка перевозиться	**$B$13:$E$16**
=	**$G$13:$G$16**	Умови повного розподілу запасів	**$F$13:$F$16**
=	**$B$18:$E$18**	Умови повного задоволення потреб	**$B$17:$E$17**

- ✓ після повернення до вікна **Solver Parameters** та введення всіх параметрів виконати вказівку **Solve.**

9 Проаналізувати розв’язок задачі, поданий у вікні **Solver results.**

10 Зберегти отриманий розв'язок.

У комірках **B13 E16** значення яких змінювалися, буде записано значення плану перевезень з мінімальними витратами; у комірку F19— значення цільової функції; у комірках стовпчика **Використано** та рядка **Задоволено** - значення, що дорівнюють значенням відповідних комірок стовпчика **Запаси** та рядка **Потреби.**

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Тарифи перевезення**					
2		**Споживач**					
3	**Постачальники**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
4	A1	30	75	25	55	150	
5	A2	88	60	30	60	375	
6	A3	30	85	30	75	180	
7	A4	35	30	60	100	150	
8	**Потреби**	150	225	180	300	855	
9							
10			План перевезень				
11	постачальники		тарифи перевезення				
12		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	використ	запаси
13	A1	0	0	0	150	150	150
14	A2	0	75	150	150	375	375
15	A3	150	0	30	0	180	180
16	A4	0	150	0	0	150	150
17	задоволено	150	225	180	300		
18	потреби	150	225	180	300		
19				**ЦІЛЬОВА**	**ФУНКЦІЯ**	36150	

В результаті розрахунків було отримано план перевезень з мінімальними витратами та значення цільової функції = 36150 грн.

Отже, використання програмного забезпечення дозволяє швидко та легко розрахувати оптимальний план перевезення.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 14

У банку є 2 види цінних паперів, що мають прибутковості, які виражаються величинами x_1 і x_2. Банк шукає такий спосіб вкладення одиниці капіталу в ці цінні папери, який забезпечив би мінімальний рівень втрат. Функція втрат банку через невдало зроблені інвестиції задається так:

$$f(x) = 3x_1^2 - x_2^2 - 5x_1x_2 - 2x_1 - x_2 \to \min$$

при

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$2x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

що являє собою збалансований портфель банку.

За допомогою MatLab отримуємо оптимальний розв’язок даної задачі:

1. Дана задача може бути записана у матричній формі:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + f^T x \quad ,$$

де

$$H = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

2. Вводимо ці матриці коефіцієнтів та визиваємо функцію *quadprog*:

```
>> H = [6 -5; -5 -2]

H =

     6    -5
    -5    -2
```

```
>> f = [-2; -1]

f =

    -2
    -1
```

```
>> A = [1 1; -1 2; 2 1]

A =

     1     1
    -1     2
     2     1

>> b = [2; 2; 3]

b =

     2
     2
     3
```

```
lb =

     0
     0

>> [x,fval,exitflag,output,lambda] = quadprog(H,f,A,b,[],[],lb)
Warning: Large-scale method does not currently solve this problem formulation,
switching to medium-scale method.
> In quadprog at 242
Optimization terminated.
```

```
x =

    0.6667
    1.3333


fval =

   -7.5556


exitflag =

     1


output =

       iterations: 2
```

```
lambda =

       lower: [2x1 double]
       upper: [2x1 double]
       eqlin: [0x1 double]
     ineqlin: [3x1 double]

>> lambda.ineqlin

ans =

    5.4444
    0.7778
         0

>> lambda.lower

ans =

     0
     0
```

Функція мінімізується при x_1 = 0,67, x_2 = 1,33, і її значення рівне -7,56. Також ми бачимо, що результати лежать лише на границях першого та другого рівнянь обмежень, і множники Лагранжа для них дорівнюють 5,44 та 0,78 відповідно.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 15

Підприємство має три виробничі лінії: виробництво газованих напоїв, виробництво соків та сиропів. Відділ маркетингу, який щороку проводить дослідження свого ринку, побачив тенденцію до зниження попиту на газовані напої та зростання попиту на соки без цукру для хворих на діабет. Також було зроблено прогноз, що наступного року попит на газовані напої ще зменшиться, що негативно вплине на економічні показники підприємства. Таким чином керівництво підприємством вирішило закрити виробництво цих напоїв, а замість цього виробляти напої для діабетиків, що потребує певного переоснащення (чи заміни), яке триватиме рік. Економічний відділ порахував й визначив, що переобладнання нової лінії коштуватиме 20 000 грн. Банк погодився надати таку суму під 10 %. Таким чином переобладнання коштуватиме підприємству 22 000 грн. Керівництву треба вирішити, чи брати кредит, чи покрити витрати на заміну лінії за рахунок власних прибутків? Тому керівник надав завдання економічному відділу, до якого входите Ви, порахувати: якими повинні бути обсяги виробництва перших двох ліній, щоб отримати якомога максимальний прибуток, якщо дві лінії максимально виробляють 400 партій напоїв й ціна за кожну партію становить відповідно 301 грн. й 501 грн.

Функція витрат перших двох ліній задається формулами:

$C_1 = 100 + X_1 + X_1^2$,

$C_2 = 100 + X_2 + X_2^2$,

Цільова функція задається формулою:

$F(Pr) = Pr_1 + Pr_2 \rightarrow \max$

Будуємо обмеження:

$g(x_1, x_2) = X_1 + X_2 \leq 400$

$X_1 \geq 0$,

$X_2 \geq 0$,

де X_1 та X_2 – обсяги (партії) виробництва відповідно перших та двох ліній за рік.

$C_з = 20\ 000$

Виражаємо цільову функцію через X_1 та X_2:

$Pr = R – C,$

$R = X \cdot P.$

$F(x_1, x_2) = 301x_1 - 100 - x_1 - x_1^2 + 501x_2 - 100 – x_2 – x_2^2 \rightarrow \max,$

$F(x_1, x_2) = 300\ x_1 + 500x_2 - x_1^2 - x_2^2 – 200 \rightarrow \max$

Рішення можна знайти двома шляхами:

1. Знаходимо частинні похідні по x_1 та по x_2:

   $\frac{\delta f(x_1, x_2)}{\delta x_1}$ $\quad f'(x_1) = 300 - 2\ x_1 = 0,$ $\quad x_1 = 150.$

   $\frac{\delta f(x_1, x_2)}{\delta x_2}$ $\quad f'(x_2) = 500 – 2\ x_2 = 0,$ $\quad x_2 = 250.$

2. Зводимо цільову функцію до рівняння із однією невідомою:

   $X_1 + X_2 \leq 400,$

   $x_2 = 400 - x_1$

   $F(x_1, x_2) = 300\ x_1 + 500(400 - x_1)$

   $- x_1^2 - (400 - x_1)^2 – 200 \rightarrow \max$

   $F(x_1, x_2) = 600\ x_1 - 2x_1^2 + 39800 \rightarrow \max$

   $f'(x_1) = 600 - 4x_1 = 0$

   $x_1 = 150,$

   $x_2 = 400 – 150 = 250.$

Підставляємо отриманні значення у цільову функцію й отримуємо прибуток у розмірі 84 800 грн. Таким чином, у підприємства залишається 84 800 – 20 000 = 64 800 грн., що позбавляє підприємство брати кредит у банку й робити переоснащення виробничої лінії за власний рахунок. При виробництві 150 партій соків та 250 партій сиропів на рік підприємство досягає максимального прибутку розміром 84 800 грн.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 15

Приватне підприємство “Аврора” уклало угоду про відкриття рахунку на валютному ринку через посередника на суму 100 тисяч доларів. Але через брак кваліфікованих кадрів на підприємстві, керівник “Аврори” змушений шукати осіб, які б займалися управлінням (торгами) грошима на валютному ринку. Існують такі варіанти щодо управління:

1. звернутись до компанії де відкрито рахунок;
2. найняти трейдера;
3. скористатися послугами компанії по управлінню активами;
4. здійснювати управління самостійно.

Керівник підприємства вирішує відкрити ще один рахунок через іншого посередника на суму 30 тисяч доларів. Витрати на управління коштами на валютному ринку, відповідно складатимуть:

1. 5-x1^2+2x1;
2. 5x2+2;
3. 1+x3^2+3x3;
4. 7-2x4^2+4x4.

Де x_i - це величина грошей, якою будуть управляти особи (ті що наведені вище); ^ - це піднесення до квадрату.

Перед керівником ПП “Аврора” стоїть завдання організувати управління коштами на валютному ринку так, щоб витрати були мінімальними.

Отже за даними вище сукупні витрати на управління коштами складатимуть:

5-x1^2+2x1+5x2+2+1+x3^2+3x3+7-2x4^2+4x4

Цільова функція буде мати вигляд:

F= 15-x1^2+2x1+5x2+x3^2+3x3-2x4^2+4x4→min

Обмеження:

x1+x2+x3+x4=100

x2+x3=30

x1>=0, x2>=0, x3>=0, x4>=0

Цю задачу можна розв’язати за допомогою Excel, MathCad або MathLab.

Задача є задач ю нелінійного програмування. Її можна розв’язати за допомогою методів: множників Лагранжа, методом конфігурацій, штрафних функцій. Розв’язуємо задачу за допомогою MathCad:

$$f(x1, x2, x3, x4) := 15 - x1^2 + 2x1 + 5x2 + x3^2 + 3x3 - 2x4^2 + 4x4$$

$$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0 \qquad x4 := 0 \qquad P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$x1 + x2 + x3 + x4 = 100$$

$$x2 + x3 = 30$$

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

$$x3 \geq 0$$

$$x4 \geq 0$$

$$P := \text{Minimize}(f, x1, x2, x3, x4)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 29 \\ 1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$f(P_0, P_1, P_2, P_3) = -9.356 \times 10^3$$

Отже, ми отримали значення функцію мети та знайшли мінімум.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 16

В Причорноморському регіоні на ринку макаронних виробів домінуючими є чотири хлібзаводи «Миколаївхліб», «Хлібінвест», «Укрхліб», «АХБ». Загальний попит на продукцію в Одеській, Миколаївській та Херсонській областях 80 тис. тон. Попит на продукцію з урахуванням розташування хлібопекарень описується такими формулами.

Одеська область:

$$X_1 + 2\left(X_2\right)^2 + 2X_3 + 4X_4 = 450$$

Миколаївська область:

$$X_1 + 4X_2 + 20\cdot X_3 + X_4 = 256$$

Херсонська область

$$X_2 + 2X_3 + 3\left(X_4\right)^2 = 1000$$

де X_1, X_2, X_3, X_4 обсяг виробництва хлібопекарень.

Визначити скільки необхідно виробляти кожному заводу при повному забезпеченні попиту на товари.

$X_1 := 1$ $\quad X_2 := 1$ $\quad X_3 := 1$ $\quad X_4 := 1$

Given

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 80$$

$$X_1 + 2\left(X_2\right)^2 + 2X_3 + 4X_4 = 450$$

$$X_1 + 4X_2 + 20\cdot X_3 + X_4 = 256$$

$$X_2 + 2X_3 + 3\left(X_4\right)^2 = 1000$$

$$\mathrm{Find}\left(X_1, X_2, X_3, X_4\right) = \begin{pmatrix} 42.054 \\ 12.677 \\ 7.262 \\ 18.007 \end{pmatrix}$$

«Миколаївхліб»- 42 тони, «Хлібінвест» - 12 тон, «Укрхліб» 8 тон, «АХБ» 18 тон.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 17

На підприємстві «Рога й копита» виробляється 2 товари: рога, копита. Виробничі функції товарів за умов очікуваної прибутковості описуються залежностями:

$$87\,X_1 + 4\left(X_1\right)^2 = 45366$$

$$34\,X_2 + 9\left(X_2\right)^2 = 23478$$

Де X1, X2 витрати на сировину. Загальна каса підприємства, що є внеском ПП «Остап Бендер» складає 200 карбованців що записується обмеженням:

$$X_1 + X_2 \le 200$$

Обрахувати, чи досягне підприємство поставлених цілей.

$X_1 := 1 \qquad X_2 := 1$

Given

$$87\,X_1 + 4\left(X_1\right)^2 = 45366$$

$$34\,X_2 + 9\left(X_2\right)^2 = 23478$$

$$12\,X_1 + 4\,X_2 \le 50000$$

$$\mathrm{Find}\left(X_1, X_2\right) = \begin{pmatrix} 96.175 \\ 49.221 \end{pmatrix}$$

Підприємству необхідно 96 карбованців на сировину «рога» й 49 карбованців на сировину «копита», при цьому залишається 55 карбованців на пиво.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 18

Задача про планування випуску продукції підприємством.

На підприємстві "Ланос" планується запровадити нову модель жіночої сукні, витрати ресурсів на впровадження нової моделі становлять 6 м. шовкової , 2 м. вовняної 1 м. льняної тканини, а також витрати часу становитимуть 5 год., коштів необхідно залучити в розмірі 14 грн. На виготовлення старої моделі сукні знадобиться 5 м. шовкової, 7 м вовняної, 3 м. льняної тканини, витрати часу становлять 7 год., а коти, що витрачаються –15грн.

Загалом бюджетом підприємства передбачено витрати грошових коштів в розмірі, що не перевищує 800 грн., 180 год. Роботи, запаси сировини складають: шовкової тканини –200м., вовняної тканини – 80 м., льняної тканини – 36 м.

На даний момент підприємство має замовлення на загальну кількість суконь у розмірі 20 шт., розмір за планового прибутку на рівні неменше 800 грн. Замовник купує нові костюми на 25 грн. дорожче собівартості, старі сукні – на 15 грн. дорожче собівартості.

Скільки необхідно пошити нових та старих суконь, щоб задовольнити всі вимоги та отримати прибуток?

Дану задачу можна розв'язати за допомогою симплекс методу та графоаналітичного методу без використання програм Excel та MathCad. Наведемо розв'язок даної задачі з використанням Excel.

Запишемо цільову функцію та систему нерівностей-обмежень:

$$F(x)=25X_1+15X_2 \to \max$$

$$6X_1+5X_2 \le 200 \qquad 2X_1+7X_2 \le 80$$

$$X_1+3X_2 \le 36 \qquad 5X_1+7X_2 \le 180$$

$$14X_1+15X_2 \le 800 \qquad X_1+X_2 \ge 20$$

$$25X_1+15X_2 \ge 800, \qquad X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$$

Заповнюємо в Excel таблицю, в які вказуємо необхідну кількість ресурсів та вимоги щодо виробництва суконь. (комірки зі значенням кількості суконь заповнюємо спочатку як 0)

Скориставшись EXCEL → Меню Tools → Solver виділяємо комірку, яку будемо максимізувати(значення цільової функції) та вказуємо необхідні обмеження. Таким чином знаходимо необхідне оптимальне рішення за заданих умов.

Назва	Кількість	Прибуток	Шовк	Вовна	Льон	Гроші	Витрати праці
Нові сукні	33	812,5	195	65	33	455,0	162,5
Старі сукні	0	0,0	0	0	0	0,0	0,0
Прибуток	33	812,5	195	65	33	455,0	162,5

Розв'язання задачі за допомогою MathCad.

$f(x1, x2) := 25 \cdot x1 + 15 \cdot x2$

$x1 := 0$

$x2 := 0$

$P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P := \text{Maximize}(f, x1, x2)$

$P = \begin{pmatrix} 32.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(P_0, P_1) = 812.5$

Given

$6 \cdot x1 + 5 \cdot x2 \le 200$

$2 \cdot x1 + 7 \cdot x2 \le 65$

$x1 + 3 \cdot x2 \le 36$

$5 \cdot x1 + 7 \cdot x2 \le 180$

$14 \cdot x1 + 15 \cdot x2 \le 800$

$x1 + x2 \ge 20$

$25 \cdot x1 + 15 \cdot x2 \ge 800$

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$

В результаті проведених розрахунків було встановлено, що фірма зможе отримати максимальний прибуток в розмірі 812 грн. 50 коп. за умов випуску 33 суконь нової модель використовуючи наявні обмежені ресурси.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 19

Прибутки що отримає підприємство ВАТ«Конд» від продаж товарів попередньо були розраховані спеціалістами, і виведені в залежність:

$$100\,X_1 + 4\left(X_1\right)^2 = 26000 \qquad 200\,X_2 + 5\left(X_2\right)^2 = 100000$$

$$300\,X_3 + 6\left(X_3\right)^2 = 49000$$

де X1, X2, X3 кількість гумових виробів.

$X_1 := 1 \qquad X_2 := 1 \qquad X_3 := 1$

Given

$$100\,X_1 + 4\left(X_1\right)^2 = 26000$$

$$200\,X_2 + 5\left(X_2\right)^2 = 100000$$

$$300\,X_3 + 6\left(X_3\right)^2 = 49000$$

$$\mathrm{Find}\left(X_1, X_2, X_3\right) = \begin{pmatrix} 69.086 \\ 122.829 \\ 68.764 \end{pmatrix}$$

Кількість виробів першого типу 69, кількість виробів другого типу 122, кількість виробів третього типу 68.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 20

Початкові дані (норми витрат, ресурси) наведені у таблиці:

Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Жіночий костюм	Чоловічий костюм
Матерія з шерсть	200	2,25	1,5
Бавовна	400	2	2,25
Гроші	300грн.	9	4,5
Кількість виробів, шт.		x_1	x_2
Прибуток за 1 виріб, грн.		10 грн.	20 грн.

Визначити кількість костюмів при максимальному прибутку, випустити не менше 10 костюмів, прибуток повинен бути більше 400 грн.

Функція мети:

$$F = 200x_1 + 400x_2 \to \max$$

Обмеження по ресурсах

$$2{,}25x_1 + 1{,}5x_2 \le 200$$

$$2x_1 + 2{,}25x_2 \le 400$$

$$9x_1 + 4{,}5x_2 \le 300$$

$$x_1 + x_2 \le 10;$$

$$10x_1 + 20x_2 \ge 400;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Назва	Кількість	Прибуток	Шерсть	Бавовна	Гроші
Жін.костюм	0	0	0	0	0
Чол.костюм	67,1	1341,6	100,6	150	300

Підсумок	67,1	1341,6	100,6	150	300

Використання Mathcad для розв’язання задач лінійного програмування.

$f(x1, x2) := 10 \cdot x1 + 20 \cdot x2$ $\qquad P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x1 := 0 \qquad x2 := 0$

Given

$0.5\sqrt{20} \cdot x1 + 1.5 x2 \le 200$

$2 \cdot x1 + 0.5\sqrt{20} \cdot x2 \le 400$

$2 \cdot \sqrt{20} \cdot x1 + \sqrt{20} \cdot x2 \le 300$

$x1 + x2 \ge 10$

$10 \cdot x1 + 20 \cdot x2 \ge 400$

$x1 > 0 \qquad x2 > 0$

$P := \text{Maximize}(f, x1, x2)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 67.082 \end{pmatrix}$$

$$f(P_0, P_1) = 1.342 \times 10^3$$

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 20

Кондитерська фабрика „Солодинка”, яке займається виготовленням двох видів шоколаду „Шок.LaFesta” (тов.1) та Шок.Nesquik (тов.2). На виробництво даної продукції використовується 2 види ресурсів: какао та цукор. Потреба в цукрі на виготовлення товару один складає 2 од., на виготовлення товару 2 – 3од. Потреба в какао: товар 1 – 5 од., товару 2 – 4 од.

Прибуток від продажу товару 1 складає 10 гр.од., товару 2 – 12 гр.од. Таким чином, загальна виручка (величина, що буде максимізуватись) складається з суми виручок від продажу кожного з товарів (10*X1, 12*X2).

Формалізуємо наведені дані:

Вид ресурсу	Запаси ресурсу	Шок.LaFesta	Шок.Nesquik
Цукор	17	2	3
Какао	18	5	4
Кількість, шт.		X1	X2
Прибуток за 1 шт.		10	12

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$F=10X1+12X2\rightarrow max$$

$$2X1+3X2<=17$$

$$5X1+4X2<=18$$

$$X1>=0,\ X2>=0$$

$$10X1+12X2>=50$$

Створюємо форму для розрахунку:

	Шок.LaFesta	Шок.Nesquik	
Значення	0,00	0,00	0,00
Нижня межа			
Верхня межа			
Коеф. В ЦФ.	10	12	

	Обмеження	Права частина
Цукор	2	17
Какао	5	18

Тепер за допомогою команди „Пошук рішення” із меню Сервіс знаходимо максимальне значення виручки та кількості товарів при заданих обмеженнях ресурсів, загальної кількості виробленої продукції та обмеженні мінімальної виручки.

Отримуємо наступні результати:

	Шок.LaFesta	Шок.Nesquik			
Значення	0	5	5		
Нижня межа					
Верхня межа					
Коеф. В					
ЦФ.	10	12		54	max

	Обмеження		Ліва частина	Права частина
Цукор	2	3	13,5	17
Какао	5	4	18	18

Таким чином, максимальна виручка у розмірі 54 гр. од. досягається за умови виробництва 0 шт. товару 1 та 5 шт. товару 2 пари заданих обмеженнях.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 21

Експериментальний цех підприємства „Промвироб” виробляє заготовки чоловічого взуття трьох видів. Необхідно отримати максимальний виторг від виробництва заготовок. Дані для складання математичної моделі вказано нижче:

Матеріал	Ресурс	Норма витрат, Дм^2/пару		
		Модель 1	*Модель 2*	*Модель3*
Шкіра	35 000Дм^2	22 дм^2/пару	25 дм^2/пару	27 дм^2/пару
Синтетика	27 000Дм^2	14 дм^2/пару	18 дм^2/пару	21 дм^2/пару
Бязь	17000Дм^2	8 дм^2/пару	10 дм^2/пару	11 дм^2/пару
Вартість, грн.		53	55	58

Отримуємо математичну модель:

$$F \rightarrow 53\ X_1 + 55\ X_2 + 58\ X_3 \rightarrow \max$$

$$22\ X_1 + 25\ X_2 + 27\ X_3 \leq 35\ 000$$

$$14\ X_1 + 18\ X_2 + 21\ X_3 \leq 27\ 000$$

$$8\ X_1 + 10\ X_2 + 11\ X_3 \leq 17\ 000$$

$$x_j => 0;\ j=1,2,3$$

Можливим є розв’язок даної задачі графоаналітичним методом та симплекс-методом.

Задача про виробництво заготовок взуття з умов обмеженості основних матеріальних ресурсів реалізована у середовищі MathCad.

Вхідні умови: функція мети, початкові умови, обмеження.

$f(x1, x2, x3) := 53 \cdot x1 + 55 \cdot x2 + 58 \cdot x3$

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0 \qquad P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Given

$22 \cdot x1 + 25 \cdot x2 + 27 \cdot x3 \le 35000$

$14 \cdot x1 + 18 \cdot x2 + 21 \cdot x3 \le 27000$

$8x1 + 10 \cdot x2 + 11 \cdot x3 \le 17000$

$x1 > 0 \quad x2 > 0 \quad x3 > 0$

Вихідні умови: знаходження максимум за обсягом виробництва та значення функції мети за умов знайденого обсягу.

$P := \text{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$$P = \begin{pmatrix} 1.591 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(P_0, P_1, P_2) = \blacksquare$

Таким чином, з метою отримання максимального прибутку, відповідно до заданих умов обмеження основних матеріальних ресурсів, оптимальним для експериментального цеху підприємства „Промвироб” є виробництво Моделі 1 у кількості 1591 пар з отриманням прибутку 84320 грн.

СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 22

Містер Х часто подорожує у справах. В аеропортах висуваються обмеження щодо вантажу, вага однієї валізи не повинна перевищувати 18 кг. В набір речей, які може взяти з собою містер Х, входить: комплект чистої білизни (2 кг), речі особистої гігієни (1,5 кг), 1 комплект одягу (1,5 кг), ноутбук (3 кг), фотоапаратура (10 кг) необхідна для роботи, „талісман успіху”, без якого містер Х не подорожує (2,5 кг). Рівень корисності, який отримує Містер Х від кожної речі становить (суб’єктивна оцінка): комплект чистої білизни 8 ютилів, речі особистої гігієни 6 ютилів, комплект одягу 8 ютилів, ноутбук 10 ютилів, фотоапаратура 15 ютилів, талісман 25 ютилів.

Знайдіть оптимальне рішення, що дозволяє максимізувати корисність для містера Х та відповідає обмеженню у вазі.

Математична модель задачі

Цільова функція:

$$F(x) = 8x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 15x_5 + 25x_6 \to \max;$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0; \\ x_3 \ge 0; \\ 0 \le x_4 \le 1; \\ 0 \le x_5 \le 1; \\ 0 \le x_6 \le 1; \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 3x_4 + 10x_5 + 2.5x_6 \le 18 \end{cases}.$$

Це типова задача динамічного програмування (типу „задача рюкзака з обмеженням у вазі”). Вручну її можна вирішити **комбінаторно-граничним методом**.

Побудуємо таблицю в MS Excel такого шаблону як таблиця 1. В колонку „Кількість речей" забиваємо всі значення =0. Колонки „Вага" і „Корисність" заповнюємо відповідно до умови задачі.

Тип речей		Кількість речей x_i штук	Вага, g_i кг	Кори-сність, u_i ютилі	Вага валізи, G_v кг	Кори-сність, U_i ютилі
комплект чистої білизни	x1	0	2	8	0	0
речі особистої гігієни	x2	0	1,5	6	0	0
комплект одягу	x3	0	1,5	8	0	0
ноутбук	x4	0	3	10	0	0
фотоапаратура	x5	0	10	15	0	0
„талісман успіху"	x6	0	2,5	25	0	0
					0	0

В колонку „Вага валізи" забиваємо формули, що є добутком кількості і-х речей на їх вагу: $G_v = x_i \cdot g_i$; колонка „Корисність" містить добутки кількості і-х речей на їх корисність: $U_i = x_i \cdot u_i$.

Підсумком в колонках „Вага валізи" та „Корисність" є сума всіх значень.

Після описаних кроків відкриваємо функцію Solver (Сервіс → Пошук рішення) і вводимо всі параметри: обмеження, комірки, що змінюватимуть значення, комірку з цільовою функцією, яку треба максимізувати. Все це показано на рис. 1.

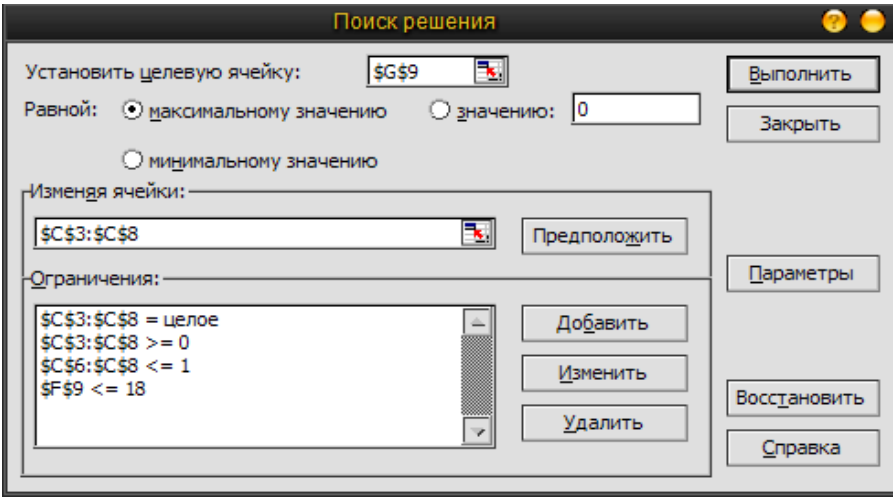


Рис. 1 Введення даних у вікно функції „Пошук рішення”

Після цього натискаємо „Виконати” й отримуємо результат, представлений у таблиці 2.

Тип речей		Кількість речей x_i штук	Вага, g_i кг	Кори-сність, u_i ютилі	Вага валізи, G_v кг	Кори-сність, U_i ютилі
комплект чистої білизни	x1	1	2	8	2	8
речі особистої гігієни	x2	0	1,5	6	0	0
комплект одягу	x3	9	1,5	8	13,5	72
ноутбук	x4	0	3	10	0	0
фотоапаратура	x5	0	10	15	0	0
„талісман успіху”	x6	1	2,5	25	2,5	25
					18	105

Крім того, функція Solver дозволяє отримати три види звітів, проте у даному випадку після введення відповідної команди з’являється попередження, що для даної задачі можна сформувати лише звіт за результатами (рис.2).

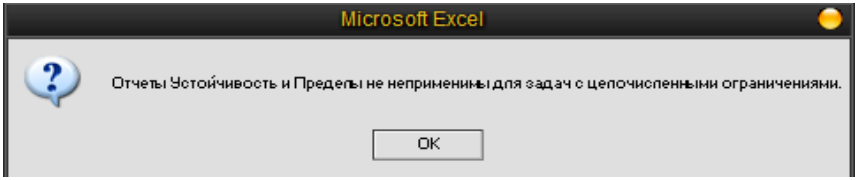


Рис. 2

Тому отримано лише один вид звіту (таблиця 3). Цей звіт вказує, які значення приймали змінні до розрахунків і які після (як вхідні змінні, так і цільова функція), а також дані стосовно обмежень.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 03.04.2008 4:49:21

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$G$9	ютилі	0	105

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$C$3	x1 штук	0	1
$C$4	x2 штук	0	0
$C$5	x3 штук	0	9
$C$6	x4 штук	0	0
$C$7	x5 штук	0	0
$C$8	x6 штук	0	1

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус
$F$9	кг	18	$F$9<=18	связанное
$C$3	x1 штук	1	$C$3>=0	не связан.
$C$4	x2 штук	0	$C$4>=0	связанное
$C$5	x3 штук	9	$C$5>=0	не связан.
$C$6	x4 штук	0	$C$6>=0	связанное
$C$6	x4 штук	0	$C$6<=1	не связан.
$C$7	x5 штук	0	$C$7<=1	не связан.
$C$7	x5 штук	0	$C$7>=0	связанное
$C$8	x6 штук	1	$C$8>=0	не связан.
$C$8	x6 штук	1	$C$8<=1	связанное
$C$3	x1 штук	1	$C$3=целое	связанное
$C$4	x2 штук	0	$C$4=целое	связанное
$C$5	x3 штук	9	$C$5=целое	связанное
$C$6	x4 штук	0	$C$6=целое	связанное
$C$7	x5 штук	0	$C$7=целое	связанное
$C$8	x6 штук	1	$C$8=целое	связанное

Отже, щоб максимізувати корисність, містер Х повинен взяти з собою 1 комплект чистої білизни, 9 комплектів одягу і, звичайно, свій „талісман успіху”. Загальна корисність при цьому становитиме 105 ютилів, а вага валізи – 18 кг, як і вимагається в аеропорту.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ю.П. Зайченко Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ “ВІПОЛ”, 2000. – 688 с.
2. Ю.П. Зайченко, Шумилова С.А. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1984. – 224 с.
3. Математические методы исследования операций. – Киев: Вища школа, 1979. – 312с.
4. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. – М.: Машиностроение, 1986. – 288с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
6. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 383с.
7. Д. Бердскаф Условия оптимизации и методы множителей Лагранжа «Радио и связь» Москва 1987 с 399
8. Х. Таха Введение в исследование операций в двух томах Москва. Мир 1985
9. Г.П. Кюкци, В. Крелле, Нелинейное программирование, Издательство Советское Радио, Москва, 1965 с. 300
10. М.Ш. Кремер Исследование операций в экономики, Издательство объединенные Юнити банки и биржи, Москва, 1999 с. 407

ЗМІСТ

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ГРАФОАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ.....4
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ 14
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛП 22
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ 32
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА 36
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НП.....44
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДП 46
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 1 54
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 2 60
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 3 62
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 4 64
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 5 68
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 6 73
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 7 76
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 8 79
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 9 80
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 10.....82
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 11.....84
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 12.....85
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 13.....86
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 14.....90
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 15.....93
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 15.....95
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 16.....97
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 17.....98
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 18.....99
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 19.....101
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 20.....102
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 20.....104
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 21.....106
СИТУАЦІЙНА ЗАДАЧА 22.....108